Solucionario Álgebra 5.°

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1. $x^{-9}.x^{-6}.x^{15} = x^0$ (correcto)

2. $2\,.\,3\,.\,4 = 24$ (correcto)

3. $\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}} = x^3$ (incorrecto, la respuesta es x^2)

Razonamiento y demostración

4. $S = \sqrt{\dfrac{4^4(4+1)}{5.4^3}} = \sqrt{\dfrac{4^4.5}{4^3.5}}$

$S = \sqrt{4^1} \Rightarrow S = 2$

Clave E

5. $C = \left(\sqrt[3]{\dfrac{7^{n+1}(7^2-1)}{7^n}}\right)^3$

$\therefore\ C = \dfrac{7^n.7.48}{7^n} = 7\,.\,48 = 336$

Clave C

6. $E = 64^{9^{-2^{-1}}} = 64^{9^{-\frac{1}{2}}} = 64^{\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$E = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$

$\therefore\ E = 4$

Clave B

7. Dato: $a^a = 3$

Nos piden:

$A = \dfrac{(a^3)^a + a^{a^{a+1}} - a^{2a}}{(a^2)^a + \dfrac{2}{3} + a^{-a}}$

Damos forma:

$A = \dfrac{(a^a)^3 + (a^a)^{a^a} - (a^a)^2}{(a^a)^2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{a^a}}$

Reemplazamos el dato:

$A = \dfrac{3^3 + 3^3 - 3^2}{3^2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}} = \dfrac{45}{10}$ $\quad\therefore A = 9/2$

Clave C

8. $P = \dfrac{(x^3)^{10}.x^{a-1}}{x^{30+a}} = \dfrac{x^{30+a-1}}{x^{30+a}}$

$P = \dfrac{x^{29+a}}{x^{30+a}} = x^{29+a-(30+a)}$

$\therefore\ P = x^{-1}$

Clave D

9. $B = \dfrac{x(x^2.x^{-3})^{-2}}{x^{-5}} = x.(x^{-1})^{-2}.x^5$

$B = x\,.\,x^2\,.\,x^5$

$\therefore B = x^8$

Clave C

Resolución de problemas

10. Dato: GA = S/.91 500

$\Rightarrow\ 91\,500 = 100\,000 - 272\,000\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$272\,000\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 8500$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$\therefore\ x = 5$ años

Clave E

11. De la expresión general: $P_{(t)} = P_o e^{kt}$

Para t = 0 (hace 13 años):

$P = 1500 \Rightarrow 1500 = P_o e^{k(0)} \Rightarrow P_o = 1500$

Para t = 13 años (actual)

$P = 4500 \Rightarrow 4500 = P_o e^{k(13)}$

$4500 = 1500\,.\,e^{13k}$

$e^k = 3^{1/13}$

Sustituimos en la expresión general:

$P_{(t)} = 1500(3^{t/13})$

Dentro de 13 años más:

$P = 1500(3^{26/13})$

$\therefore\ P = 13\,500$ habitantes

Clave A

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

12. $x = (-2)^{-2} + (-1)^{-1}$

$x = \dfrac{1}{(-2)^2} + \dfrac{1}{-1}$

$x = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$ ...(I)

$y = \sqrt{4\sqrt{16}} = \sqrt{4.4} = \sqrt{16}$

$y = 4$ ...(II)

De (I) y (II): $xy = -3$

Clave A

13. $P = \left((5^3)^2\right)^{\sqrt{2}} = 5^{3.2.\sqrt{2}} = 5^{6\sqrt{2}}$

$Q = (5^3)^{\sqrt{2^2}} = (5^3)^2 = 5^6$

$R = 5^{\sqrt{2}^{2^3}} = 5^{\sqrt{2}^8} = 5^{2^4} = 5^{16}$

$R > P > Q$

Clave A

Razonamiento y demostración

14. $\left(\dfrac{2^{a+3} + 2^a}{3^{a+2}}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\dfrac{2^a.2^3 + 2^a}{3^a.3^2}\right)^{\frac{1}{a}}$

Factorizando 2ª del numerador:

$\left(\dfrac{2^a(2^3+1)}{3^a\,.\,3^2}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^a\right)^{\frac{1}{a}} = \dfrac{2}{3}$

Clave C

15. $\left(\dfrac{2^{x+1}.5^{2x+1} - 2^x.5^{2x}}{2^3.5^x + 5^x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$= \left(\dfrac{2^x.5^{2x}(2.5-1)}{5^x(2^3+1)}\right)^{\frac{1}{x}}$

$= (2^x.5^x)^{\frac{1}{x}} = ((2.5)^x)^{\frac{1}{x}} = 10$

Clave C

16. $A = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}}$

$A = \sqrt{2 + 2^2 + 3^3 + 4^4}$

$A = \sqrt{2 + 4 + 27 + 256} = \sqrt{289}$

$A = \sqrt{17^2} = 17$

Clave B

17. $\left(2 + \dfrac{1}{2^2}\right)^{2-2^{-1}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\dfrac{9}{4}}\right)^3$

$= \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = 3{,}375$

Clave E

18. $\dfrac{\left[((x^2)^3)^4\right]^5.x^{6^3}}{x^{11^2}.(x^{21})^{10}}$

$= \dfrac{x^{2.3.4.5}.x^{216}}{x^{121}.x^{210}}$

$= \dfrac{x^{120}.x^{216}}{x^{331}} = \dfrac{x^{336}}{x^{331}} = x^5$

Clave E

19. $S = \dfrac{2^n.\,4^{n+1}.8^{n+2}}{2^{6n+1}}$

$S = \dfrac{2^n\,.\,(2^2)^{n+1}\,.\,(2^3)^{n+2}}{2^{6n+1}}$

$S = \dfrac{2^n.2^{2n+2}.2^{3n+6}}{2^{6n+1}}$

Reduciendo: $S = \dfrac{2^{6n+8}}{2^{6n+1}} = 2^7 = 128$

Clave E

20. $x^y = \dfrac{1}{2}\ \wedge\ y^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

Luego:

$x^{y^{1+x}} = x^{y^1.y^x} = x^{y.2} = (x^y)^2$

$\therefore\ x^{y^{1+x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Clave D

21. $A = (x^{-2})^{-4} . (x^2)^{\frac{1}{4}} . x^{\frac{1}{2}}$

$A = x^8 . x^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}} = x^{8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$

$\therefore\ A = x^9$

Clave C

Resolución de problemas

22. De los datos y el modelo:

$32{,}81 \text{ mg} = 50 \text{ mg}\left(1 - \frac{9{,}5 \text{ mg}}{50 \text{ mg}}\right)^t$

$(0{,}81)^2 = (0{,}81)^t$

$\therefore\ t = 2 \text{ min}$

Clave B

23. En: $t = 0$ horas: $HI_{(0)} = 1$ persona infectada

$t = 1$ hora $= HI_{(1)} = 3^1$ "

$t = 2$ horas $= HI_{(2)} = 3^2$ "

$t = 3$ horas $= HI_{(3)} = 3^3$ "

$\vdots \qquad \vdots$

$t = t$ horas $= HI_{(t)} = 3^t$ "

Luego:

$HI_{(10)} = 3^{10} = 59\,049$ personas

$\therefore\ HI_{(10)} = 59\,049$ personas

Clave A

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

24.

I. $3^{x-2} . 3^{3-x} = 3$ (V)

II. $(\sqrt{2^3})^2 . 2^2 = 2^3 . 2^2 = 2^5 = 32$ (V)

III. $(3 + 3)^{24} = (2 . 3)^{24} = 2^{24} . 3^{24}$ (F)

IV. $(3 . 2)^{12} = 3^{12} . 2^{12}$ (V)

Hay 3 verdaderas.

Clave C

25.

- 4
- 5
- x^n

Razonamiento y demostración

26. $M = \sqrt[a]{\dfrac{20^{a+1}}{4^{a+2} + 2^{2a+2}}} = \sqrt[a]{\dfrac{(4.5)^{a+1}}{4^a.4^2 + 2^{2a}.2^2}}$

$= \sqrt[a]{\dfrac{4^{a+1}.5^{a+1}}{4^a.4^2 + (2^2)^a.2^2}} = \sqrt[a]{\dfrac{4^{a+1}.5^{a+1}}{4^a.4^2 + 4^a.4}}$

Factorizamos $4^a . 4$ en el denominador:

$M = \sqrt[a]{\dfrac{4^a.4.5^a.5}{4^a.4(4+1)}} = \sqrt[a]{5^a} = 5$

Clave B

27. $\left\{(-3)^{16^{\frac{1}{2}}} - (-7)^{8^{\frac{1}{3}}}\right\}^{\frac{1}{5}} =$

$\left\{(-3)^{(4^2)^{\frac{1}{2}}} - (-7)^{(2^3)^{\frac{1}{3}}}\right\}^{\frac{1}{5}}$

Simplificamos: $\{(-3)^4 - (-7)^2\}^{\frac{1}{5}}$

Observación: $(-a)^{2n} = a^{2n}$

Luego:

$\{3^4 - (7)^2\}^{\frac{1}{5}} =$

$\{81 - 49\}^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2$

Clave C

28. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{16}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{2^{-1}}$

Invertimos las bases con exponente negativo:

$\left[3^3 + \left(\frac{121}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$

$\left[27 + \left(\frac{(11)^2}{4^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{25}{4}\right]^{\frac{1}{2}} =$

$\left[27 + \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[27 + \frac{11 + 25}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[27 + \frac{36}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= [27 + 9]^{\frac{1}{2}}$

$= 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6$

Clave A

29. $\dfrac{x^y.y^x}{x^x.y^y} . \left(\dfrac{y}{x}\right)^{y-x} \cdot \dfrac{x(x^y)^x.(y^x)^y.y}{\underbrace{xx...x}_{xy \text{ veces}}\ \underbrace{yy...yy}_{xy \text{ veces}}}$

$= \dfrac{x^{y-x}}{y^{y-x}} . \dfrac{y^{y-x}}{x^{y-x}} \cdot \dfrac{x.x^{xy}.y^{xy}.y}{x^{xy}.y^{xy}} = xy$

Clave C

30. Dato:

$x^{a+b} = ax^{-a} \Rightarrow x^{a+b} = \dfrac{a}{x^a}$

$x^{a+b} . x^a = a \Rightarrow x^{2a+b} = a$

Nos piden:

$x^b(x^{x^{2a}})^{2x^b} = x^b.x^{x^{2a}.2x^b}$

Reemplazamos la condición:

$x^b . x^{2a} = x^{2a+b} = a$

Clave C

31. $a^{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{b}\sqrt{\dfrac{1}{4\sqrt{b}}}$

Entonces:

$\sqrt[4]{a}^{\sqrt[4]{a}} = \left[\left(\dfrac{1}{2\sqrt[4]{b}}\right)^{\frac{2}{\sqrt[4]{b}}}\right]^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[4]{a}^{\sqrt[4]{a}} = \left[\dfrac{1}{2\sqrt[4]{b}}\right]^{\frac{1}{2\sqrt[4]{b}}}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{a} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{b}}$

$a = \dfrac{1}{16b} \Rightarrow a . b = \dfrac{1}{16}$

Clave C

32. $(5^x)^2 + (3^x)^2 = 2(3 . 5)^x$

$\underbrace{(5^x)^2 - 2(5^x)(3^x) + (3^x)^2}_{} = 0$

$(5^x - 3^x)^2 = 0$

$\Rightarrow 5^x - 3^x = 0 \Rightarrow 5^x = 3^x \Rightarrow x = 0$

Luego:

$E = \dfrac{5^{0+1} + 3^{0+2}}{7.5^{0-1}} = \dfrac{5 + 9}{7.5^{-1}} = \dfrac{14.5}{7}$

$\therefore\ E = 10$

Clave A

Resolución de problemas

33. Según la ecuación exponencial: $R = 3.7^{kx}$

Por dato: $x = 0{,}0286$

$R = 21$

Reemplazando: $21 = 3 . 7^{0{,}0286k}$

$7 = 7^{0{,}0286k}$

$\therefore\ k = 34{,}97$

Clave E

34. La mitad de cualquier cantidad dada de uranio – 238 se desintegrará en $4510 . 10^6$ años:

$m_o \xrightarrow{\ 4510 . 10^6 \text{ años}\ } \dfrac{m_0}{2}$

Del modelo matemático:

$m(t) = m_0 e^{\psi t}$ (i)

$\dfrac{m_0}{2} = m_0.e^{\psi(4510.10^6)}$

$e^{\psi} = 2^{-\frac{1}{4510.10^6}}$ (ii)

(ii) en (i):

$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{4510.10^6}}$ (iii)

$2^{-\frac{1}{112{,}75.10^6}} m_0 = m_0 2^{-\frac{t}{4510.10^6}}$

$\therefore\ t = 40$ años

Clave D

POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Transformando la expresión:

$$P(x,y,z)=a^{a^{\sqrt{b}}}x^3y^3z^2+7yz^2-\sqrt[9]{2^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}x^2+\frac{x^3y^2z^5}{\sqrt{ab}^3}-\sqrt{3^{-3^{-3}}}xy^2z^3$$

Observando se deduce que es un polinomio racional entero.

Clave B

2. 3 veces: $P(x, y) = 8x^4y + 24x^2y^3 + cy^5$
(Polinomio homogéneo)

1 vez: $P(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$
(Polinomio homogéneo)

Razonamiento y demostración

3. Sea $x = 2 \Rightarrow P_{(2)} = P_{(1)} + P_{(0)}$

$4 = 3 + P_{(0)}$

$\Rightarrow P_{(0)} = 1$

$\Rightarrow P(P_{(0)}) = P_{(1)} = 3$

Clave B

4. $R(-1) = (2(-1) + 5)^2 - 8$

$R(-1) = (-2 + 5)^2 - 8 = 3^2 - 8$

$R(-1) = 1$

$$\therefore \frac{1 - R(-1)}{R(20)} = \frac{1 - 1}{R(20)} = 0$$

Clave B

5. $P(x) = 3x + 2$

Sea:
$x = 1 \Rightarrow P(1) = 3(1) + 2 = 5$
$x = 0 \Rightarrow P(0) = 3(0) + 2 = 2$

Nos piden: $P(1)^{P(0)} = 5^2 = 25$

Clave D

6. $P_{(-x)} = -3(-x) + 1$

$\Rightarrow P_{(1)} = -3(1) + 1 = -2$

$P_{(-1)} = -3(-1) + 1 = 4$

$\Rightarrow P_{(1)} + P_{(-1)} = -2 + 4 = 2$

Clave B

7. $f_{(x-2)} = 2(x - 2) + 5$

$f_{(1)} = 2(1) + 5 = 7$

$f_{(2)} = 2(2) + 5 = 9$

$f_{(3)} = 2(3) + 5 = 11$

$$\therefore \frac{f_{(1)} + f_{(2)}}{f_{(3)}} = \frac{7 + 9}{11} = \frac{16}{11}$$

Clave D

8. $P_{(3x+1)} = (3x + 1)3 + 5$

$\Rightarrow P_{(2x+3)} = (2x + 3)3 + 5$

$P_{(2x+3)} = 6x + 14$

Clave B

9. $(x) = 5x - 4$

$\underbrace{P(f(x))}= 5f(x) - 4$

$5x + 1 = 5f(x) - 4$

$5x + 5 = 5f(x)$

$\Rightarrow f(x) = x + 1$

$\therefore f(3) = 4$

Clave D

10. $P(x) = (n - 4)x^{n-4} + (m + 1)x^{2n+1} - x^{2n-2}$

$GA(P) = 2n + 1 = 7 \Rightarrow n = 3$

Clave A

11. Si $GR(y) = 7$

$\Rightarrow 2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2$

Clave A

12. $M = a^{\frac{1}{x}}.a^{\frac{2}{x}}.a^{\frac{3}{x}}....a^{\frac{x}{x}}$

$$M = a^{\frac{1+2+3+...x}{x}} = a^{\frac{x(x+1)}{2x}}$$

$$M = a^{\frac{x+1}{2}} = a^9$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2} = 9 \Rightarrow x + 1 = 18 \quad \therefore x = 17$$

Clave D

Resolución de Problemas

13. $18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = a(bx + a)(cx - a)^b$

Entonces:
$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = a(bx + a)(cx - a)^b$ ...(1)
$\downarrow$
$a > 0$

De (1), se observa que $b = 2$
Luego:

$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = a(2x + a)(cx - a)^2$ ...(2)

Si: $x = 0$
$\Rightarrow 1 = a(a)(-a)^2 = a^4$
$\Rightarrow a = 1$

Reemplazando en (2):

$18x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (2x + 1)(cx - 1)^2$

$18x^3 - 3x^2 - \underline{4x} + 1 = 2c^2x^3 + x^2(c^2 - 4c) + \underline{2(1 - c)x} + 1$

$-4 = 2(1 - c)$

$-2 = 1 - c \Rightarrow c = 3$

$\therefore a + b + c = 6$

Clave B

14. $2p = 20x + 8y + 40z$

$P(x, y, z) =$ ancho

$7x + 2y + 17z =$ largo

$\Rightarrow 2(7x + 2y + 17z) + 2P(x, y, z) = 20x + 8y + 40z$

$P(x, y, z) = 3x + 2y + 3z$

Clave A

Nivel 2 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

15. Primer grupo:

$(5x + 6) + (5x + 3) + (3x^2 + 3x + 5) +$
$(9x + 4) + (x^2 + 7x + 4) = 4x^2 + 29x + 22$

Segundo grupo:

$(2x^2 + x + 4) + (9x + 3) + (7x + 8) +$
$(8x + 4) + (2x^2 + 4x + 3) = 4x^2 + 29x + 22$

16.

I. ABSOLUTO	VII. SÍ
II. IGUALES	VIII. A
III. UNIDAD	
IV. SIGNO	
V. CERO	
VI. DOS	

Razonamiento y demostración

17. $P(x - 2) = x^2 + 3x - 2$

Piden: $P(0)$

Entonces: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Por lo tanto: $P(0) = (2)^2 + 3(2) - 2 = 8$

Clave B

18. $P(x) = x^2 - 2$

Sea:
$x = -2 \Rightarrow P(-2) = 2^2 - 2 = 2$
$x = 2 \Rightarrow P(2) = 2^2 - 2 = 2$

Nos piden:
$$\underbrace{P(..P(P(-2))...)}_{2002 \text{ veces}} = P(...P(2)...)$$
$$= P(2) = 2$$

Clave E

19. $P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$

$P(x) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$ ...(I)

$Q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$ ...(II)

De (I):
$x = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow P(\sqrt[3]{-8}) = (\sqrt[3]{-8})^3 + 8 = 0$

De (II):
$x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow Q(x) = (\sqrt[3]{2})^3 - 1 = 1$

Nos piden:
$P(\sqrt[3]{-8}) + Q(\sqrt[3]{2}) = 0 + 1 = 1$

Clave E

20. $F(x) = \frac{2}{x+1}$

$$x = 1 \Rightarrow F(1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow F(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$x = 3 \Rightarrow F(3) = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$$

Nos piden:

$[F(1) + F(2) + F(3)]^{-1} = \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right]^{-1}$

$= \left[\frac{13}{6}\right]^{-1} = \frac{6}{13}$

Clave B

21. $6f(x) = 5x + f(x)$

$5f(x) = 5x \Rightarrow f(x) = x$

$\Rightarrow f(1) + f(2) + ... + f(10) = \frac{10(10+1)}{2}$

$\therefore\ f(1) + f(2) + ... + f(10) = 55$

Clave D

22. $P(x) = x(x - 2) + 3$

$P(x) = \underbrace{x^2 - 2x + 1} + 2$

$P(x) = (x - 1)^2 + 2$ ... (I)

Dato: $P(a + 1) - P(a - 1) = 4$ ... (¬)

De (I): $x = a + 1$

$P(a + 1) = (a + 1 - 1)^2 + 2$

$P(a + 1) = a^2 + 2$

De (I): $x = a - 1$

$P(a - 1) = (a - 1 - 1)^2 + 2$

$P(a - 1) = (a - 2)^2 + 2$

Reemplazando en (¬):

$[a^2 + 2] - [(a - 2)^2 + 2] = 4$

$a^2 - (a - 2)^2 = 4$

$a^2 - (a^2 - 4a + 4) = 4$

$4a - 4 = 4 \Rightarrow a = 2$

Nos piden: $P(a) = P(2) = ?$

De (I): $x = 2$

$P(2) = (2 - 1)^2 + 2 = 3$

Clave E

23. $P(x^2) = \sqrt{(-x)^4} = x^2$

Cambiando x^2 por x:

$\Rightarrow P(x) = x$

Nos piden:

$\frac{P(\pi + x^2) - P(\pi - x^2)}{2P\left(\frac{x^2}{2}\right)}$

$= \frac{\pi + x^2 - (\pi - x^2)}{2 . \frac{x^2}{2}} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$

Clave B

24. $P(x - 1) = x + 2$ ...(I)

$P(f(x)) = 2x + 7$ ...(II)

De (I): $P_{(x-1)} = (x - 1) + 3$

Reemplazando: $P(f(x)) = f(x) + 3$ ...(III)

Luego: (III) = (II)

$P(f(x)) = f(x) + 3 = 2x + 7$

$f(x) = 2x + 4$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 2(4) + 4 = 12$

Clave D

25. $P(x) = (x^m + 5)(x^m + 4)(x^m + 3)(x^m + 2)$

Dato: P(x) es de grado 32

Al desarrollar P(x), el mayor grado de x es:

$m + m + m + m = 4m$

$\Rightarrow 4m = 32 \Rightarrow m = 8$

Clave A

26. Grado $P(x) = 3 + 8 + 13 + ... + 93$ (+5, +5)

$\#\text{ términos} = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 = \frac{93 - 3}{5} + 1 = 19$

Suma términos $= \left(\frac{a_n + a_1}{2}\right)\#\text{ términos}$

$= \left(\frac{93 + 3}{2}\right)19 = 912$

$\therefore$ Grado $P(x) = 912$

Clave A

27. $P(x; y) = -3x^{2n-1}y^{n+1} + 7x^{2n+7}y^{n+2}$

$GR(x) = 2n + 7 = 17 \Rightarrow n = 5$

$GR(y) = n + 2 = 5 + 2 = 7$

Nos piden: $GR(y) + n = 7 + 5 = 12$

Clave A

28. $P(x; y) = 2x^{a-2}y^{2a} - 5x^{a+1}y^{2a+3}$

$GR(x) = a + 1 = 13 \Rightarrow a = 12$

$GR(y) = 2a + 3 = 2(12) + 3 = 27$

Nos piden: $a - GR(y) = 12 - 27 = -15$

Clave A

Resolución de problemas

29. Sea t el número de términos, luego:

$$A(m, n, p) = \sqrt[7]{\frac{m^{\frac{ab}{6}}}{n^{\frac{a}{2}}p^{\frac{b}{3}}}} + \sqrt[7]{\frac{m^{2\left(\frac{ab}{6}\right)}}{n^{\frac{a+1}{2}}p^{\frac{b+1}{3}}}}$$

$$+ \sqrt[7]{\frac{m^{3\left(\frac{ab}{6}\right)}}{n^{\frac{a+2}{2}}p^{\frac{b+2}{3}}}} + ... + \sqrt[7]{\frac{m^{t\left(\frac{ab}{6}\right)}}{n^{\frac{a+(t-1)}{2}}p^{\frac{b+(t-1)}{3}}}}$$

Como es homogéneo, se cumple:

$\frac{t\left(\frac{ab}{6}\right)}{7} = 25$ (dato) (i)

Luego: $\frac{t\left(\frac{5}{6}\right)}{7} = 25 \Rightarrow t = 210$ términos

Clave D

30. Por definición de polinomio homogéneo:

$\underset{(I)}{a^7 - 3a + 7} = \underset{(II)}{a^7(n - 1)(n - 3) + a^6 + 65} = \underset{(III)}{a^7 + 2a - 3}$

De I y III: $a = 2$

De I y II: $\boxed{n = 1}\ \vee\ \boxed{n = 3}$

$\Sigma coef = n^n(n + 1)^2 - 7 + n^2 - 1$

Para $n = 1$: $\Sigma coef. = -3$

Para $n = 3$: $\Sigma coef. = 433$

Clave C

31. Empleamos el siguiente artificio de:

"Sumar o restar 1 en H(y)":

$H(y) = 2y^3 + 5y^2 + 4y + 1 + 1 - 1$

$H(y) = (y + 1)^2(2y + 1) + 0$

Como son idénticos con I(y), tendremos:

$(y + 1)^2(2y + 1) + 0 = (my + n)^t(ty + p) + q$

Identificando términos:

$m = 1; n = 1, t = 2; p = 1, q = 0$

$\Rightarrow p = \left(\frac{1^2.1^1}{1 - 0}\right)(1^2.2^1) = (1)(2) = 2$

Clave B

Nivel 3 (página 15) Unidad 1

Comunicación matemática

32. Resolución:

3x + 3	7x + 0
3x + 9	2x + 8
0x + 1	9x + 8
6x + 0	0x + 9
6x + 3	x + 1
3x + 2	5x + 5
3x + 7	x + 9
4x + 7	x + 8

33. Sean: área total = A_T; volumen = V

(A) A_T = área base + área lateral (4 triángulos)

$= (2(x + 3))^2 + 4\left(\frac{2(x + 3)(x + 7)}{2}\right)$

$\boxed{A_T = 8x^2 + 64x + 120}$

$V = \frac{1}{3}$(Área base)(altura)

$= \frac{1}{3}(2(x + 3))^2(x + 5)$

$\boxed{V = \frac{4}{3}x^3 + \frac{44}{3}x^2 + 52x + 60}$

(B) $A_T = (2x)^2 + 4\left(\frac{2(x)(2x + 3)}{2}\right)$

$\boxed{A_T = 12x^2 + 12x}$

$V = \frac{1}{3}(2x)^2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

$\boxed{V = \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{3}}$

Razonamiento y demostración

34. $P(x) = a^x + bx + \frac{c}{x}$

Además: $P(2) - P(1) = -\frac{1}{4}$ ... (I)

Sea: $x = 2 \Rightarrow P(2) = a^2 + 2b + \frac{c}{2}$

$x = 1 \Rightarrow P(1) = a + b + c$

Reemp. en (I):

$$(a^2 + 2b + \frac{c}{2}) - (a + b + c) = -\frac{1}{4}$$

$$a^2 - a + b - \frac{c}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$4a^2 - 4a + 4b - 2c = -1$$

$$4a^2 - 4a + 4b + 1 = 2c$$

Nos piden:

$$\frac{(2a-1)^2 + 4b}{c} = \frac{4a^2 - 4a + 1 + 4b}{c}$$

$$= \frac{2c}{c} = 2$$

Clave A

35. $\frac{4}{5-n} \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad n - 3 > 0$

$\Rightarrow n = \{1; 3; 4\} \quad \wedge \quad n > 3$
$\Rightarrow n = 4$

Reemplazamos:

$$P(x) = 2x^{\frac{4}{5-4}} + 4 \,.\, x^{4-3} + 4^2$$

$$P(x) = 2x^4 + 4x + 16$$

$\therefore \; P(2) = 2 \,.\, 2^4 + 4 \,.\, 2 + 16 = 56$

Clave D

36. $f(x + 1) = x - 2a$ ...(I)

$f(1) = 4$

En (I): $x = 0$
$f(1) = -2a = 4 \Rightarrow a = -2$

Luego:
$f(x + 1) = x + 4$ ...(II)

Nos piden:
$f(a) = f(-2) = ?$

De (II): $x = -3$
$f(-2) = -3 + 4 = 1$

Clave D

37. $P(x) = 2x - 1$

Sea:
$x = 1 \Rightarrow P(1) = 2(1) - 1 = 1$
$x = 2 \Rightarrow P(2) = 2(2) - 1 = 3$
$x = 3 \Rightarrow P(3) = 2(3) - 1 = 5$
$\vdots$
$x = 30 \Rightarrow P(30) = 2(30) - 1 = 59$

Sumando:
$P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(30)$
$= 1 + 3 + 5 + \ldots + 59 = 30^2 = 900$

Clave C

38. $P(x) = ax^{12} - bx^9 + bx^6 - ax^3 + 1$

Sea: $x = 0 \Rightarrow P(0) = 1$
Sea: $x = 1 \Rightarrow P(1) = a - b + b - a + 1 = 1$

Nos piden:

$$M = \underbrace{P(\ldots(P(P(0)))\ldots)}_{2010 \text{ veces}}$$

$$M = P(\ldots(P(\underbrace{P(1)}_{1}))\ldots)$$

$$\underbrace{1}_{\substack{1 \\ \vdots}}$$

$$1$$

$M = P(1) = 1$

Clave B

39. $f(x) = x(x - 2) + 1$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Para: $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Haciendo: $x \to x + 1$
$f(x + 1) = (x + 1 - 1)^2 = x^2$

Haciendo: $x \to x - 1$
$\Rightarrow f(x - 1) = (x - 1 - 1)^2 = (x - 2)^2$

Nos piden: $\dfrac{\left[f(x)^{f\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2}{f(x+1) - f(x-1)}$

Reemplazando:

$$\frac{\left[((x-1)^2)^{\frac{1}{4}}\right]^2}{x^2 - (x-2)^2} = \frac{x-1}{(2x-2)(2)} = \frac{x-1}{2.2(x-1)} = \frac{1}{4}$$

Clave B

40. $F(z) = 3z + 14$ ... (I)

Cambiando z por 2F(a), en (I):
$F(2F(a)) = 3(2F(a)) + 14$
$F(2F(a)) = 6F(a) + 14$ ... (α)

Cambiando z por 3F(a) + 1, en (I):
$F(3F(a) + 1) = 3(3F(a) + 1) + 14$
$F(3F(a) + 1) = 9F(a) + 17$ ... (β)

Dato:
$F(2F(a)) + F(3F(a) + 1) = 286$ ... (II)

Reemplazando (α) y (β) en (II):
$6F(a) + 14 + 9F(a) + 17 = 286$
$15F(a) + 31 = 286$
$15F(a) = 255 \Rightarrow F(a) = 17$

Clave D

41. $P(x - 2) = kx - 8$ ... (I)

Cambiando: x por x + 2
Reemplazando:
$P(x + 2 - 2) = k(x + 2) - 8$
$P(x) = kx + 2k - 8$

Dado que P(x) no tiene término independiente, luego:
$2k - 8 = 0 \Rightarrow k = 4$

Reemplazando en (I):
$P(x - 2) = 4x - 8$
Cambiando: x por x + 3
$P(x + 3 - 2) = 4(x + 3) - 8$
$P(x + 1) = 4x + 4$

Clave A

42. $a - 7 \geq 0 \qquad 9 - a \geq 0$

$a \geq 7 \qquad 9 \geq a$

$P \Rightarrow a = \{7; 8; 9\}$

Probando los valores se observa que para a = 7 el GA es mínimo.

$P(x) = 2x^{2(7)+6} + x^{7-7} + 3x^{9-7}$
$P(x) = 2x^{20} + 1 + 3x^2$
$\therefore$ GA (P(x)) = 20

Clave C

43. $S(x; y) = 7x^{m+n} \,.\, y^n + 2x^{m+6} \,.\, y^{n+4}$

Si es homogéneo se cumple:
$m + 2n = m + n + 10$
$n = 10$

Dato: $GR(y) - GR(x) = 2$ ...(I)

Se observa que:
$GR(y) = n + 4$
$GR(x) = m + 10$

Reemplazando en (I):
$(n + 4) - (m + 10) = 2$
$m = 2$

Reemplazando en el polinomio los valores encontrados:
$S(x; y) = 7x^{12} \,.\, y^{10} + 2x^8 \,.\, y^{14}$

Nos piden: GA(S) = 22

Clave B

44. Piden: $M = \dfrac{x^{n-m}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}}}$ ...(1)

Como:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} = m$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$+\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = m$$

$$n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} = n - m \quad \ldots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$M = \frac{x^{n-m}}{x^{n-m}} = x^0$$

$\therefore$ El grado de M es 0.

Clave A

45. $GA(M) = 25$

$2a + 3b + a + b = 25$
$\Rightarrow 3a + 4b = 25$ ...(I)

$GR(y) = 7$
$\Rightarrow a + b = 7$ ...(I)

De (I) y (II):
$a = 3 \wedge b = 4$
$\therefore$ Coeficiente = 4ab = 48

Clave B

Resolución de problemas

46. El grado del monomio estará expresado como:

$GM = (n^2-p^2)y + (p^2-m^2)p + (m^2-n^2)$! (i)

Asímismo el polinomio B(x, y, z) por ser homogéneo se cumple:

$$\frac{n^2+p^2-m^2}{y} = \frac{p^2+m^2-n^2}{p} = \frac{m^2+n^2-p^2}{e} = A$$

Donde:

$$y = \frac{2^2+p^2-m^2}{A};\ p = \frac{p^2+m^2-n^2}{A};\ e = \frac{m^2+n^2-p^2}{A} \quad ...(ii)$$

(ii) en (i):

$$GM = (n^2-p^2)\left(\frac{n^2+p^2-m^2}{A}\right) + (p^2-m^2)\left(\frac{p^2+m^2-n^2}{A}\right) + (m^2-n^2)\left(\frac{m^2+n^2-p^2}{A}\right)$$

Operando: $GM = 0$

Clave A

47. Según la homogeneidad del polinomio, establecemos:

$$\left.\begin{array}{l} y^2z^2 = a^3 \\ x^2z^2 = b^3 \\ x^2y^2 = c^3 \end{array}\right\} (i) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^4z^4 = a^6 \\ x^4z^4 = b^6 \\ x^4y^4 = c^6 \end{array}\right\} (iii)$$

$x^4 + y^4 + z^4 = d^3$ (v)

de (i): $x^4y^4z^4 = a^3b^3c^3$ (ii)

Dividiendo (ii) entre cada igualdad de (iii):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^4y^4z^4}{y^4z^4} = \dfrac{a^3b^3c^3}{a^6} \Rightarrow x^4 = \dfrac{b^3c^3}{a^3} \\ \dfrac{x^4y^4z^4}{x^4z^4} = \dfrac{a^3b^3c^3}{b^c} \Rightarrow y^4 = \dfrac{a^3c^3}{b^3} \\ \dfrac{x^4y^4z^4}{x^4y^4} = \dfrac{a^3b^3c^3}{c^6} \Rightarrow z^4 = \dfrac{a^3b^3}{c^3} \end{array}\right\} (iv)$$

(iv) en (v): $\dfrac{b^3c^3}{a^3} + \dfrac{a^3c^3}{b^3} + \dfrac{a^3b^3}{c^3} = d^3$

$$\underbrace{(bc)^6 + (ac)^6 + (ab)^6}_{GM = y^3} = (abcd)^3 = E^3$$

Clave C

48. (i) Sabemos que cuando x = a

$\Rightarrow TI(T(x)) = T(0)$

$$T(0) = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{27}{64}\right)\left(\frac{64}{125}\right) \quad ...27 \text{ factores}$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3...\left(-\left(\frac{27}{28}\right)^3\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{27}{64}\right)\left(\frac{64}{125}\right)...\left(-\frac{(27)^3}{(28)^3}\right)$$

$$= f - \frac{1}{(28)^3}$$

$$T(0) = \frac{1}{21952}$$

(ii) El grado del producto de T = G(T)

$G(T) = 11 + 23 + 43 + 71 + ...$

$= (2^2+7) + (4^2+7) + (6^2+7) + (8^2+7) + ...$

$$= \underbrace{(2^2.1^2+7)}_{1} + \underbrace{(2^2.2^2+7)}_{2} + \underbrace{(2^2.3^2+7)}_{3} + \underbrace{(2^2.4^2+7)}_{4} + ... + \underbrace{(2^2(27)^2+3)}_{27 \text{ sumandos}}$$

Agrupando:

$$G(T) = 2^2\underbrace{(1^2+2^2+3^2+...+27^2)}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + \underbrace{(7+7+7+...+7)}_{27 \text{ sumandos}}$$

$$G(T(x)) = 2^2\left(\frac{27(27+1)2(27+1)}{6}\right) + 27(7)$$

$G(T(x)) = 27\,909$

Clave A

49. $2a + 9b + 7 = 33 \Rightarrow 2a + 9b = 26$ (1)

$5a + 1 = 9b + 3 \Rightarrow 5a - 9b = 2$ (2)

De (1) y (2):

$a = 4$ y $b = 2$

$\Sigma coef(Q) = Q(1, 1) = b^{b^2} + a^b + 2a^bb^a + 1$

$Q(1, 1) = 2^{2^2} + 42 + 2(42)(2)4 + 1$

$\Sigma coef(Q(x, y)) = 545$

Clave C

50. Observamos la formación de los exponentes de las variables:

3m – 27	3m – 26	3m – 25	...
(3m – 27)	(3m – 27) + 1	(3m – 27) + 2	...

Notamos que van aumentando de uno en uno. Con esto, el polinomio es ordenado y más aún que por condición del problema el polinomio es completo, deducimos que el exponente del primer término es cero:

$3m - 27 = 0$

$m = 9$

En el polinomio:

$$H(x) = (2(9)-1)x^{3(9)-27} + (2(9)-2)x^{3(9)-2b} + (2(9)-3)x^{3(9)-25} + ...$$

$$H(x) = (2(9)-1)x^{27-27} + (2(9)-2)x^{27-(27-1)} + (2(9)-2)x^{27-(27-2)} + ...$$
$$(2(9)-15)x^{27-(27-14)} + (2(9)-16)x^{27-(27-15)} + (2(9)-17)x^{27-(27-16)} + (2(9)-18)x^{27-(27-17)} + (2(9)-19)x^{27-(27-18)} + ...$$

$$H(x) = 17x^0 + 16x^1 + 15x^2 + ... + 3x^{14} + 2x^{15} + \underbrace{x^{16} + 0x^{17} - x^{18} - 2x^{19} + ...}$$

Por el coef. cero y en los sucesivos ya no forma parte de un polinomio completo.

n.° términos = grado polinomio + 1

n.° términos = 16 + 1 = 17

Clave A

51. $$\underbrace{x^0y^a}_{a} + \underbrace{x^1y^{a-1}}_{a} + \underbrace{x^2y^{a-2}}_{a} + ... + \underbrace{x^{a-2}y^2}_{a} + \underbrace{x^{a-1}y}_{a} + \underbrace{x^ay^0}_{a}$$

$a(a + 1) = 342 = 18(18 + 1)$

n.° términos = a + 1 = 18 + 1 = 19

Clave B

52. $\alpha + \beta - \gamma - e^2 = 0$ ...(1)

$\beta - de = 0$ ...(2)

$\beta + \gamma - a - d^2 = 0$ ...(3)

(1) + (3): $2\beta = d^2 + e^2$

$2de = d^2 + e^2$

$d = e$ ...(4)

(4) en (2): $\beta = e^2 = d^2$ ...(5)

(5) en (1): $\alpha + e^2 - \gamma - e^2 = 0$

$\alpha = \gamma$ ...(6)

$$N = \frac{\beta}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} + 7\frac{\gamma}{\gamma} = 1 + 1 + 7 = 9$$

Clave E

53. Como son idénticos: J(t) / L(t)

$(9-c)t^{49} \equiv mt^{c^2+2cd+d^2}$ ...(1)

$-(3+d)t^{43} \equiv cnt^{c^2+2cd+d}$ ...(2)

$-cdt^{40} / 2\theta t^{c^2+2cd}$ ...(3)

De (1), (2) y (3) igualamos exponentes:

- $c^2 + 2cd + d^2 = (c+d)^2 = 49 \Rightarrow c + d = 7$
- $c^2 + 2cd + d = 43$ (i) $\quad d = 3$
- $c^2 + 2cd = 40$ (ii) $\quad c = 4$

Igualando coeficientes:

$m = 9 - c = 9 - 4 = 5 \Rightarrow m = 5$

$3n = -(3+d) = -(3+3) = -6 \Rightarrow n = -2$

$2\theta = -cd = -4(3) = -12 \Rightarrow \theta = -6$

$-p = c^2 + d^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow p = -25$

Nos piden:

$$\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{\theta}{n}} = \left(\frac{-25}{5}\right)^{\frac{-6}{-2}} = -125$$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 18) Unidad 1

1. $\dfrac{a^n}{b^n}+\dfrac{4b^n}{a^n}=725$

$(a^n)^2+4(b^n)^2=725a^nb^n$

Sumamos $4a^nb^n$:
$(a^n)^2+4a^nb^n+(2b^n)^2=725a^nb^n+4a^nb^n$

Dando forma:
$\underbrace{(a^n)^2+2a^n(2b^n)+(2b^n)^2}_{(a^n+2b^n)^2}=729a^nb^n$

Sacamos $\sqrt{\ }$:
$a^n+2b^n=\sqrt{729a^nb^n}$
$a^n+2b^n=27\sqrt{a^nb^n}$
$\dfrac{a^n+2b^n}{\sqrt{a^nb^n}}=27$

Sacamos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{\dfrac{a^n+2b^n}{\sqrt{a^nb^n}}}=\sqrt[3]{27}=3$

$\Rightarrow A=3$

Clave C

2. $x=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$ ... (I)

$y=\dfrac{3}{2}b+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a^2}{b}$ ...(II)

$ab=32$
De (I): $2ax=3a^2+b^2$
Multiplicando por b:
$2abx=3a^2b+b^3$ ...(α)
De (II): $2by=3b^2+a^2$

Multiplicando por a:
$2aby=a^3+3ab^2$ ...(β)
(α) + (β):
$2ab(x+y)=\underbrace{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}_{(a+b)^3}$

$\Rightarrow x+y=\dfrac{(a+b)^3}{2ab}$

(α) – (β):
$2ab(x-y)=b^3+3a^2b-a^3-3ab^2$
$2ab(x-y)=-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
$\Rightarrow x-y=-\dfrac{(a-b)^3}{2ab}$

Nos piden:
$\sqrt[3]{(x+y)^2}-\sqrt[3]{(x-y)^2}$

$=\sqrt[3]{\left[\dfrac{(a+b)^3}{2ab}\right]^2}-\sqrt[3]{\left[\dfrac{-(a-b)^3}{2ab}\right]^2}$

$=\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt[3]{4(ab)^2}}-\dfrac{(a-b)^2}{\sqrt[3]{4(ab)^2}}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{\sqrt[3]{4(ab)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{(4ab)^3}}{\sqrt[3]{4(ab)^2}}=\sqrt[3]{4^2ab}=\sqrt[3]{2^4.2^5}=\sqrt[3]{2^9}=2^3=8$

Clave D

3. Dato:
$a=1+b$
$\Rightarrow a-b=1$
Luego:
$M=1\,.\,(a+b)(b^2+a^2)(b^4+a^4)$
$M=(a-b)(a+b)(b^2+a^2)(b^4+a^4)$
$M=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
$M=(a^4-b^4)(a^4+b^4)$
$\therefore\ M=a^8-b^8$

Clave C

4. $N=4(a-b)(a-c)+(b-c)^2$
$N=4(a^2-(b+c)a+bc)+b^2-2bc+c^2$
$N=(2a)^2-4(b+c)a+\underbrace{b^2+2bc+c^2}_{(b+c)^2}$

$N=(2a)^2-2(2a)(b+c)+(b+c)^2$
$N=(2a-(b+c))^2$ ...(1)

Del dato:
$2a=b+c+d$
$\Rightarrow d=2a-(b+c)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$\therefore N=d^2$

Clave B

5. Dato: $x+\sqrt[3]{3}=1+\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

$x-1=\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{3}$

Elevando al cubo:
$(x-1)^3=\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{3}\right)^3$

Desarrollando:
$x^3-3x^2+3x-1=\dfrac{27}{3}-3$
$\qquad -3\cdot\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{3}\underbrace{\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}-\sqrt[3]{3}\right)}_{x-1}$

$x^3-3x^2+3x-1=9-3-9(x-1)$
$x^3-3x^2+3x-1=6-9x+9$
$x^3-3x^2+12x-16=0$

Clave E

6. $M=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$

Elevamos al cubo y evaluamos en su forma corta:
$M^3=20+\sqrt{392}+20-\sqrt{392}$
$\qquad +3(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}).(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}})M$

$M^3=40+3\left(\sqrt[3]{20^2-\sqrt{392}^2}\right).M$
$M^3=40+\left(3\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})(20-\sqrt{392})}\right)M$

$M^3=40+3(\sqrt[3]{8}).M$

$M^3=40+6M$

$M^3-6M=40$

$M(M^2-6)=4\,.\,10=4\,.\,(4^2-6)\Rightarrow M=4$

Clave D

7. Dato:
$a^2+b^2=1$
$M=(a^4+b^4)-[(a^2)^3+(b^2)^3]$
$M=(a^4+b^4)-\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}[a^4-a^2b^2+b^4]$

$M=a^4+b^4-[a^4-a^2b^2+b^4]$
$\therefore\ M=a^2b^2$

Clave C

8. Dato: $z^{-1}(x+y)=-1\Rightarrow x+y+z=0$

Se cumple:
$x^3+y^3+z^3=3xyz$ ...(I)

Elevando al cuadrado:
$x^6+y^6+z^6+2(x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3)=9x^2y^2z^2$
$x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2(x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3)$ ...(a)

Nos piden:
$S=\dfrac{y^6+z^6+x^2(x^4-9y^2z^2)}{x^4(3yz-x^2)+y^3z^3}$

$S=\dfrac{x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2}{x^3x(3yz-x^2)+y^3z^3}$

$S=\dfrac{x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2}{x^3(3xyz-x^3)+y^3z^3}$ ... (II)

De (I): $3xyz-x^3=y^3+z^3$ ...(b)

Reemplazando a y b en (II):

$S=\dfrac{-2(x^2y^3+y^3z^3+x^3z^3)}{x^3(y^3+z^3)+y^3z^3}$

$S=\dfrac{-2(x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3)}{x^3y^3+y^3z^3+x^3z^3}=-2$

Clave E

9. Por identidad de Gauss:
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Dato:
$a^3+b^3+c^3=3abc$
$\Rightarrow 0=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
$\Rightarrow a+b+c=0\ \vee\ a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Si $a+b+c=0$
$\Rightarrow M=\dfrac{-2(ab+ac+bc)}{ab+bc+ac}=-2$

Si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$
$\Rightarrow a=b=c$ (propiedad)

Luego:
$M=\dfrac{3a^2}{3a^2}=1$

$\therefore M_{máx.}=1$

Clave C

10. $M = \dfrac{(4a-6)(2-a)-2(2a-3)(1-a)+2(2-a)(a-1)}{-(2a-3)^2-(a-1)^2-(a-2)^2}$

$M = \dfrac{-2(2a-3)(2-a)-2(2a-3)(1-a)-2(2-a)(1-a)}{-[(2a-3)^2+(1-a)^2+(2-a)^2]}$

$M = \dfrac{-2[(2a-3)(2-a)+(2a-3)(1-a)+(2-a)(1-a)]}{-[(2a-3)^2+(1-a)^2+(2-a)^2]}$ ...(I)

Luego , sea:

$\left.\begin{array}{l} 2a-3=x \\ 1-a=y \\ 2-a=z \end{array}\right\} x+y+z=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=-2[xy+xz+yz]$

Reemplazando en (I):

$M = \dfrac{2[xz+xy+zy]}{x^2+y^2+z^2}$

$M = \dfrac{2[xz+xy+zy]}{-2[xy+xz+yz]} = -1$

Clave C

11. Dato:

$a^3+b^3+c^3=3$

$(a+b)(b+c)(a+c)=-1$

Sabemos que:

$\underbrace{(a+b+c)^3}_{3} = a^3+b^3+c^3+3\underbrace{(a+b)(b+c)(a+c)}_{-1}$

$(a+b+c)^3=0 \Rightarrow a+b+c=0$

Piden:

$S = \dfrac{a^{-2}+b^{-8}+c^{-2}}{(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^2}$

$S = \dfrac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$

Reducimos:

$S = \dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{(ab+bc+ac)^2}$

$S = \dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2abc(a+b+c)}$

$S = \dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2} = 1$

Clave A

12. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=0$

Sea:

$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y}=a \\ \frac{y}{z}=b \\ \frac{z}{x}=c \end{array}\right\}$ $a+b+c=0$; También: $abc=1$

Nos piden: $S = \left(\dfrac{x^2+yz}{x^2}\right)\left(\dfrac{y^2+xz}{y^2}\right)\left(\dfrac{z^2+xy}{z^2}\right)$

Dando forma:

$S = \left(\dfrac{x^2+yz}{xy}\right)\left(\dfrac{y^2+xz}{yz}\right)\left(\dfrac{z^2+xy}{xz}\right)$

$S = \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{z}\right)$

Reemplazando:

$S=(a+c)(b+a)(c+b)$

Recuerda:

$(a+b)(b+c)(a+c)+\underbrace{abc}_{1} = (a+b+c)\underbrace{(ab+bc+ac)}_{0}$

$(a+b)(b+c)(a+c)=-1$

Luego: $S=-1$

Clave A

13. Datos:

$x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$ax+b=\sqrt{b^2-ac}$

Elevamos al cuadrado:

$a^2x^2+2abx+b^2=b^2-ac$

Sumamos a^2:

$a^2x^2+2abx+a^2=a^2-ac$

$a(ax^2+2bx+a)=a(a-c)$

$ax^2+2bx+a=a-c$

$y = \dfrac{-b-\sqrt{b^2+ac}}{a}$

$ay+b=-\sqrt{b^2+ac}$

Elevamos al cuadrado:

$a^2y^2+2aby+b^2=b^2+ac$

$a^2y^2+2aby=ac$

Restamos a^2:

$a^2y^2+2aby-a^2=ac-a^2$

$a(ay^2+2by-a)=a(c-a)$

$ay^2+2by-a=c-a$

Nos piden:

$K = \dfrac{ax^2+2bx+a}{ay^2+2by-a} = \dfrac{a-c}{-(a-c)} = -1$

Clave C

14. Nos piden:

$G = \dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{(4a^2+b^2)^2-(4a^2-b^2)^2}$

Sabemos que:

$(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$

$(4a^2+b^2)^2-(4a^2-b^2)^2=4\times 4a^2b^2$

$G = \dfrac{8ab(a^2+b^2)}{16a^2b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ ...(I)

Dato:

Área del cuadrado = 8 (área del triángulo)

$(a+b)^2 = 8 \,.\, \dfrac{1}{2}ab$

$a^2+2ab+b^2=4ab$

$a^2-2ab+b^2=0$

$(a-b)^2=0 \Rightarrow a-b=0$

$a=b$

Reemplazamos en (I):

$G = \dfrac{a^2+a^2}{2a\,.\,a} = \dfrac{2a^2}{2a^2} = 1$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 20) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. Sea la expresión: M

$M=(x-y+z-w)(x+y-z+w)+(y+w)(y+w-2z)+z^2$

$M=[x-(y-z+w)][x+(y-z+w)]+\underbrace{(y+w)^2-2(y+w)z+z^2}_{(y+w-z)^2}$

$M=x^2-(y-z+w)^2+(y+w-z)^2=x^2$

Clave D

4. Datos:
$a^2 + b^2 = 1$
$ab = a + b$

Nos piden:
$S = (ab - 1)^2 = \underbrace{(ab)^2}_{a+b} - 2ab + 1$

$S = (a + b)^2 - 2ab + 1$

$S = \underbrace{a^2 + b^2}_{1} + 2ab - 2ab + 1$

$S = 1 + 1 = 2$

Clave B

5. Sea: $a = 3x - 2y \wedge b = 2x + 3y$
$\Rightarrow a + b = 5x + y$
Luego, reemplazando en el dato:
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{a.b} = \frac{4}{a+b}$
$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$
$\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} = 0 \Rightarrow a = b$
$3x - 2y = 2x + 3y \Rightarrow x = 5y$
Piden:
$\frac{x+2y}{2x-y} = \frac{5y+2y}{2(5y)-y} = \frac{7y}{9y} = \frac{7}{9}$
$\therefore \frac{x+2y}{2x-y} = \left(\frac{9}{7}\right)^{-1}$

Clave B

6. $S = [(a + b)^2]^2 - [(a - b)^2]^2$
$S = [(a + b)^2 + (a - b)^2][(a + b)^2 - (a - b)^2]$
$S = 2(a^2 + b^2) . \underbrace{4ab}_{n}$
$S = 8(a^2 + b^2) . n$ ...(1)

Como:
$a + b = m$
$a^2 + b^2 + 2ab = m^2$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = m^2 - 2n$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$\therefore S = 8n(m^2 - 2n)$

Clave A

7. $M = (a + b - 3)(a - b + 3) + b^2 - 6b + 9$
$M = \underbrace{[a + (b - 3)][a - (b - 3)]}_{\text{Diferencia de cuadrados}} + b^2 - 6b + 9$
$M = a^2 - (b - 3)^2 + b^2 - 6b + 9$
$M = a^2 - b^2 + 6b - 9 + b^2 - 6b + 9$
$M = a^2$

Clave B

8. $P = \left[(\sqrt[8]{2} + 1)(\sqrt[8]{2} - 1)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)\right]^3$
$P = \left[(\sqrt[8]{2}^{\,2} - 1^2)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)\right]^3$
$P = \left[(\sqrt[4]{2}^{\,2} - 1^2)(\sqrt{2} + 1)\right]^3$
$P = \left[(\sqrt{2})^2 - 1^2\right]^3 = 1^3 = 1$

Clave A

9. $M = (1 + x)^3 + (1 - x)^3 - 6x^2 + 8$
Desarrollando:
$M = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 6x^2 + 8$
$M = 10$
$N = (1 + x)^3 - (1 - x)^3 - 2x^3$
Desarrollando:
$N = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - (1 - 3x + 3x^2 - x^3) - 2x^3$
$N = 6x$
Nos piden: $MN = 60x$

Clave A

10. Sea: $x = a + b$
$\Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
$x^3 = 28 + 3 . 3 . x$
$x^3 - 9x = 28$
$x(x^2 - 9) = 28 = 4 . 7 = 4(4^2 - 9)$
$\therefore x = 4$

Clave D

11. $G = (a + b + c)^3 - (a + b)^3 - 3c(a + b + c)(a + b)$
Sea: $a + b = x$
$G = (x + c)^3 - x^3 - 3c(x + c)x$
Desarrollando:
$G = x^3 + c^3 + 3xc(x + c) - x^3 - 3xc(x + c)$
$G = c^3$

Clave A

12. Del dato:
$y^2 = (1 - x)(x + y)$
$\Rightarrow y^2 = x + y - x^2 - xy$
Resolviendo:
$x^2 + xy + y^2 = (x + y)$
$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x + y)(x - y)$
$x^3 - y^3 = x^2 - y^2$
$x^3 + y^2 = x^2 + y^3$
$\therefore E = \frac{x^2 + y^3}{x^3 + y^2} = 1$

Clave B

Resolución de problemas

13. $x - x^{-1} = ??$
$x^4 + x^{-4} = 34$
Sumamos 2:
$\underbrace{x^4 + x^{-4} + 2\underbrace{x^2x^{-2}}_{1}}_{(x^2+x^{-2})^2} = 34 + 2 = 36$

Sacando $\sqrt{\ }$: $x^2 + x^{-2} = 6$

Restamos 2:
$\underbrace{x^2 + x^{-2} - 2\underbrace{xx^{-1}}_{1}}_{(x-x^{-1})^2} = 6 - 2 = 4$

Sacamos $\sqrt{\ }$: $x - x^{-1} = 2$

Clave C

14. Como:
$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ac)$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 3(ab + bc + ac)$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ...(1)

La ecuación (1) se cumple, entonces:
Por propiedad: $a = b = c$
$A = \sqrt[7]{\frac{(a+b+c)^8}{a^8 + b^8 + c^8}} = \sqrt[7]{\frac{(3a)^8}{3a^8}} = \sqrt[7]{\frac{3^8.a^8}{3.a^8}}$
$\therefore A = 3$

Clave B

Nivel 2 (página 21) Unidad 1

Comunicación matemática

15.

Clave B

16.

Razonamiento y demostración

17. $a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$
Elevando al cuadrado:
$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 - 2a\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4}$
$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$
Sumamos 2:
$a^2 + 2a\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{17}{4} + 2 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{25}{4}$
Sacando $\sqrt{\ }$: $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$

Clave B

18. Del dato:
$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{3}{a+b} - \frac{1}{b}$
Resolviendo:
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Rightarrow (a + b)^2 = 4ab$
$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$
$a^2 - 2ab + b^2 = 0$
$(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

$\therefore S = \frac{a^3 + b^2a + 3a^2b}{ab^2 + 3a^2b + b^3} = \frac{5a^3}{5a^3} = 1$

Clave B

19. Piden: $N = xy\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ ...(1)
Del dato: $x + y = 3\sqrt{xy}$
Elevamos al cuadrado:
$x^2 + 2xy + y^2 = 9xy$
$x^2 + y^2 = 7xy$
$\frac{x^2 + y^2}{xy} = 7 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$
$\therefore N = 7$

Clave C

20. $M = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab}$ ...(1)

Del dato:
$(a + b) = 6 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 36$
$30 + 2ab = 36$
$ab = 3$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$M = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{3} = \frac{6(a^2+b^2-ab)}{3}$$

$\therefore \quad M = 2(30-3) = 54$

Clave E

21. Dato:

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad ...(I)$$

$$b = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\frac{\sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$$

$$b = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} \quad ...(II)$$

(I): $a^2 = 4 - 2\sqrt{\underbrace{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \Rightarrow a^2 = 4-2 = 2$

(II): $b^2 = 6 - 2\sqrt{\underbrace{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}_{1}} \Rightarrow b^2 = 6-2 = 4$

Nos piden: $a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6$

Clave B

22. $K = (x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4) + 64$

$$K = \underbrace{(x+2)(x^2-2x+4)}_{\text{Suma de cubos}}\underbrace{(x-2)(x^2+2x+4)}_{\text{Diferencia de cubos}} + 64$$

$$K = \underbrace{(x^3+2^3)(x^3-2^3)}_{\text{Diferencia de cuadrados}} + 64$$

$K = x^6 - (2^3)^2 + 64$

$K = x^6$

Clave D

23. $P = (1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})$

Dando forma: $P = [(1+\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})][(1+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})]$

Aplicamos diferencia de cuadrados: $P = (1+\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

Desarrollando:

$P = (1+2\sqrt{6}+6) - (2+3+2\sqrt{6})$

$P = 7 - 5 = 2$

Clave C

24. $\sqrt[9]{(m^6-m^3n^3+n^6)(m^6+m^3n^3+n^6)(m^6-n^6)+n^{18}}$

$= \sqrt[9]{(m^3+n^3)(m^6-m^3n^3+n^6)(m^3-n^3)(m^6+m^3n^3+n^6)+n^{18}}$

$= \sqrt[9]{(m^9+n^9)(m^9-n^9)+n^{18}} = \sqrt[9]{m^{18}-n^{18}+n^{18}}$

$= m^2$

Clave B

25. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(a+b)(a^4+a^2.b^2+b^4)$

Luego:

$$\underbrace{\underbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}_{(\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2)}(a+b)}_{a^2-b^2}(a^4+a^2b^2+b^4)$$

$= (a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

Es diferencia de cubos: $(a^2)^3 - (b^2)^3 = a^6 - b^6$

Clave B

Resolución de problemas

26. Datos:

$a - b = n \quad ...(I)$

$a^3 - b^3 = m$

Elevamos al cubo (I):

$(a-b)^3 = n^3$

$$\underbrace{a^3-b^3}_{m} - 3ab\underbrace{(a-b)}_{n} = n^3$$

$m - 3abn = n^3$

$3abn = m - n^3$

$$ab = \frac{m-n^3}{3n}$$

Clave D

27. $x - y = 1$

(1) $(x+y)(x^6+y^6)(x^4+x^2y^2+y^4) = x^{3n} - y^{3n}$

$(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^6+y^6) = x^{3n} - y^{3n}$

$(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^6+y^6) = x^{3n} - y^{3n}$

$(x^6-y^6)(x^6+y^6) = x^{3n} - y^{3n}$

$x^{3.4} - y^{3.4} = x^{3n} - y^{3n}$

Se observa que: $n = 4$

Clave B

28. Sean: $a = 1662$

$b = 283$

$a - b = 1379$

En Z: $Z = a^3 - b^3 - (a-b)^3$

De la identidad de Cauchy:

$Z = 3ab(a-b)$

$Z = 3(1662)(283)(1379)$

$Z = 3(6)(277)(283)(1379)$

Es divisible por: 277 y 283

Clave C

Nivel 3 (página 22) Unidad 1

Comunicación matemática

29.

30. Por la identidad auxiliar:

$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz$

Se puede escribir:

$(x+y+z)^3 + 3xyz = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz) \quad ...(\alpha)$

De la relación dada:

$xyz = (x+y+z)(xy+xz+yz)$

$3xyz = 3(x+y+z)(xy+xz+yz)$

En (α): $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3 \Rightarrow$ (II) es verdadera.

Razonamiento y demostración

31. $E = \quad [(a+b)+(c+d)]^2 + [(a+b)-(c+d)]^2 - 2[(a-b)^2+(c-d)^2]$

$E = (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2 - 2(a-b)^2 - 2(c-d)^2$

$E = 2[(a+b)^2 - (a-b)^2 + (c+d)^2 - (c-d)^2]$

$$E = 2[4ab+4cd] = 8\underbrace{(ab+cd)}_{m}$$

$\therefore E = 8m$

Clave B

32. Dato:

$10x^4 + 10x^2 + 4 = 13x^2 - 6$

$10x^4 + 10x^2 + 10 = 13x^2$

Dividendo entre x^2:

$10x^2 + 10 + \frac{10}{x^2} = 13$

$10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{10}$

Nos piden:

$S = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

$S = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

$S = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$

Clave A

33. $x + y = \sqrt{10} \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 10 - 2xy$ ...(1)

$(x - z)^2 + (z + y)^2 = 6$

$\Rightarrow x^2 - 2xz + z^2 + z^2 + 2zy + y^2 = 6$

$x^2 + y^2 - 2xz + 2zy + 2z^2 = 6$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$10 - 2xy - 2xz + 2zy + 2z^2 = 6$

$-2xz - 2xy + 2yz + 2z^2 = -4$

$\Rightarrow xz + xy - yz - z^2 = 2$

$\therefore M = 2$

Clave B

34. $E = \sqrt[32]{1 + 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)}$

$E = \sqrt[32]{1 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2^2 - 1)(2^2 + 1)}_{(2^4-1)}(2^4 + 1)}_{(2^8-1)}(2^8 + 1)}_{(2^{16}-1)}(2^{16} + 1)}_{(2^{32}-1)}}$

$E = \sqrt[32]{1 + 2^{32} - 1} = \sqrt[32]{2^{32}} = 2$

Clave E

35. $\sqrt[8]{3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) + 1}$

$= \sqrt[8]{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2^2 - 1)(2^2 + 1)}_{(2^4 - 1)}(2^4 + 1)}_{(2^8 - 1)}(2^8 + 1)}_{2^{16} - 1} + 1}$

$= \sqrt[8]{2^{16} - 1 + 1} = \sqrt[8]{2^{16}} = 2^2 = 4$

Clave D

36. $\frac{(x + a + b)(x + a + c) - bc}{x + a + b + c} - a$

Multiplicando:

$= \frac{x^2 + (2a + b + c)x + (a + b)(a + c) - bc}{x + a + b + c} - a$

$= \frac{x^2 + (2a + b + c)x + a^2 + (b + c)a + bc - bc - a(x + a + b + c)}{x + a + b + c}$

$= \frac{x^2 + (2a + b + c)x + a^2 + (b + c)a - ax - a^2 - a(b + c)}{x + a + b + c}$

$= \frac{x^2 + (a + b + c)x}{x + a + b + c} = \frac{x(x + a + b + c)}{x + a + b + c} = x$

Clave C

37. Área del cuadrado de lado "a + b" = $(a + b)^2$

Área del triángulo de base "a" y altura "b" = $\frac{ab}{2}$

Dato del enunciado: $(a + b)^2 = 8\left(\frac{ab}{2}\right)$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \Rightarrow \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{TCP}} = 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$ ...(α)

Nos piden: $G = \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{(4a^2 + b^2)^2 - (4a^2 - b^2)^2}$ ...(β)

(α) en (β):

$G = \frac{(2a)^4 - 0^4}{(5a^2)^2 - (3a^2)^2} = \frac{16a^4}{16a^4}$

$\therefore G = 1$

Clave A

38. Dato:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ ...(1)

$a^2 + b^2 = 3ab$

Piden:

$E = \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)^3 + \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)^3 = \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right)^3 + \left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right)^3$

$E = \left(\frac{3ab}{b^2}\right)^3 + \left(\frac{3ab}{a^2}\right)^3 = 27\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3\right]$ ...(2)

Elevando (1) al cubo:

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}_{3} = 27$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + 9 = 27$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 18$ ...(3)

Reemplazando (3) en (2): $\therefore E = 27 . 18 = 486$

Clave E

39. Dato: $\frac{4}{x} + x = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$

Multiplicando por $(x - 2)$:

$\underbrace{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}_{x^3 - 2^3} = 0(x - 2)$

$= 0 \Rightarrow x^3 = 8$

Nos piden:

$S = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Multiplicando convenientemente:

$S = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1$

Luego: $S = 8^2 - 1 = 63$

Clave D

Resolución de problemas

40. Dato:

(*) $x = a(a+1) + b(b+1) + ab$

$x = a^2 + b^2 + a + b + ab \ldots (I)$

(*) $y = a(a-1) + b(b-1) + ab$

$y = a^2 + b^2 - a - b + ab \ldots (II)$

(I) + (II): $x + y = 2(a^2 + b^2 + ab)$

(I) – (II): $x - y = 2(a + b)$

Nos piden: $\dfrac{x^2 - y^2}{4(a^3 - b^3)} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{4(a^3 - b^3)}$

Reemplazando:

$$\frac{4(a+b)(a^2+b^2+ab)}{4(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a+b}{a-b}$$

Clave A

41. Del dato:

$$\frac{mn}{m^2+n^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Al invertir la expresión tenemos: $\sqrt{5} = \dfrac{m^2+n^2}{mn} \Rightarrow \sqrt{5} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}$

Luego: $\left(\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{m}\right)^2 = 3$

Elevando nuevamente al cuadrado:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^4 + 2\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^4 = 9$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^4 + \left(\frac{n}{m}\right)^4 = 7$$

$$\left(\left(\frac{m}{n}\right)^4 + \left(\frac{n}{m}\right)^4\right)^2 = 7^2$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^8 + 2\left(\frac{m}{n}\right)^4\left(\frac{n}{m}\right)^4 + \left(\frac{n}{m}\right)^8 = 49$$

$$\therefore \left(\frac{m}{n}\right)^8 + \left(\frac{n}{m}\right)^8 = 47$$

Clave C

42. Haciendo:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 77777 &= a \\ 77776 &= a - 1 \\ 77778 &= a + 1 \end{aligned}\right\} P(a-1) = \ ?$$

$P(a-1) = (a-1)^3 + (a+1)(a-1) - a(a-1)^2 - 2a = -2$

Clave A

43. $A = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{b(2a^2 - ab + b^2)}{\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{(a-b)^2}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}}\right)$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{b(2a^2 - ab + b^2)}{\dfrac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - (a-b)^3}{(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}}$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{2b(2a^2 - ab + b^2)\,(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{2b(2a^2 - ab + b^2)}$$

$$A = \frac{(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{3}$$

$$B = \frac{a^3+b^3}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a+b} + \frac{12a^2b^2}{a^2-b^2} + \frac{4ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$B = \frac{(a^3+b^3)(a+b) - (a^3-b^3)(a-b) + 12a^2b^2 + 4ab(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}$$

$$B = \frac{6a^3b + 6ab^3 + 12a^2b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$B = \frac{(6a^2b + 6ab^2)(a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$B = \frac{3(2a^2b + 2ab^2)}{a-b}$$

$$C = \frac{\dfrac{b}{2ab(a+b)} - \dfrac{c}{2ab(a+b)}}{\left(\dfrac{b^2 - c^2}{\left(2ab(a+b)\right)^2 + \dfrac{2a(b-c)}{\left(2ab(a+b)\right)^2}}\right) \cdot \dfrac{1}{2a+b+c}}$$

$$C = \frac{(2a^2b + 2ab^2)^2(2a+b+c)(b-c)}{(2a^2b + 2ab^2)(b^2 - c^2 + 2ab - 2ac)}$$

$$C = \frac{(2a^2b + 2ab^2)(2a+b+c)(b-c)}{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + 2ac + c^2)}$$

$$C = \frac{(2a^2b + 2ab^2)\big((a+b) + (a+c)\big)\big((a+b) - (a+c)\big)}{(a+b)^2 - (a+c)^2}$$

$$C = \frac{(2a^2b + 2ab^2)\left((a+b)^2 - (a+c)^2\right)}{\left((a+b)^2 - (a+c)^2\right)}$$

$C = 2a^2b + 2ab^2$

Veamos cómo está conformado M por AB y C:

$$M = \frac{AB}{C} + C$$

Reemplazando las expresiones A, B y C:

$$M = \frac{\left(\dfrac{(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{3}\right)\left(\dfrac{3(2a^2b + 2ab^2)}{a-b}\right)}{2a^2b + 2ab^2} + 2a^2b + 2ab^2$$

$$M = \frac{(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(2a^2b + 2ab^2)}{2a^2b + 2ab^2} + 2a^2b + 2ab^2$$

$= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$M = (a+b)^3$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 26) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

A) $\underline{\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{y}}{\sqrt[15]{x}+\sqrt[35]{y}}}$ B) $\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{y}}{\sqrt[15]{x}-\sqrt[35]{y}}$

C) $\underline{\dfrac{x^{27^{5n}}+1}{x^{3^{13m}}+1}}$ D) $\dfrac{x^{275}+b^{165}}{x^5-b^3}$

E) $\underline{\dfrac{x^n-1}{x-1}}$ F) $\underline{\dfrac{x^{30}+y^{30}}{x^3+y^2}}$

2.

Cociente notable	Desarrollo	C ó I	Desarrollo correcto
$\dfrac{x^6-1}{x-1}$	$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$	I	$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
$\dfrac{x^8-1}{x^2+1}$	$-x^6+x^5-x^2+1$	I	$x^6-x^4+x^2-1$
$\dfrac{a^5+b^5}{a+b}$	$a^4-a^3b+a^2b^2+ab^3-b^4$	I	$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$
$\dfrac{m^4-\frac{n^4}{16}}{m-\frac{n}{2}}$	$m^3+\dfrac{m^2n}{2}+\dfrac{mn^2}{4}+\dfrac{n^3}{8}$	C	———

Razonamiento y demostración

3.

4. Sea n: n.° términos $= \dfrac{-2a}{3} = \dfrac{6}{-a}$

$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$

$a = -3 \Rightarrow n = \dfrac{6}{-(-3)} = 2$

$t_2 = (x^3)^{2-2}(y^{-(-3)})^{2-1} = (x^3)^0(y^3)^1$

$\therefore t_2 = y^3$

Clave D

5. $\dfrac{(2x+1)^5-(x+5)^5}{(2x+1)-(x+5)}$

n.° términos = 5

Luego:

$P(x) = t_3 = (2x+1)^{5-3}(x+5)^{3-1}$

$P(x) = (2x+1)^2(x+5)^2$

Piden: $P(1) = (2(1)+1)^2(1+5)^2 = 3^2 \cdot 6^2$

$\therefore P(1) = 324$

Clave E

6. $k = \dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{3}$; $4 \le k \le 6$ ...(1)

Como el CN tiene la forma:

$\dfrac{x^m+y^n}{x^2+y^3} \Rightarrow$ n.° términos: k es impar

Luego, en (1):

$\Rightarrow k = 5;\ m = 10 \ \wedge\ n = 15$

$\Rightarrow t_3 = (x^2)^{5-3}(y^3)^{3-1} = (x^2)^2(y^3)^2$

$\therefore t_3 = x^4y^6$

Clave C

7. n.° términos $= \dfrac{18}{3} = 6$

$\Rightarrow t_4 = [(x+y)^3]^{6-4}[(x-y)^2]^{4-1}$

$t_4 = (x+y)^6(x-y)^6$

$t_4 = [(x+y)(x-y)]^6 = (x^2-y^2)^6$ ...(1)

Reemplazando $x = 2$ e $y = \sqrt{2}$ en (1):

$\therefore t_4 = (2^2-\sqrt{2}^2)^6 = (4-2)^6 = 64$

Clave D

8. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x+2)^n-x^n}{x+1}\right]$

$= \dfrac{(x+2)^n-x^n}{2x+2} = \dfrac{(x+2)^n-x^n}{(x+2)+x}$

Sabemos que: $t_3 = (x+2)^{n-3} \cdot x^{3-1}$

Dato:

V. N. $t_{3_{x=2}} = (2+2)^{n-3} \cdot 2^2 = 1024$

$(2^2)^{n-3} \cdot 2^2 = 2^{10}$

$2^{2n-4} = 2^{10}$

Luego: $2n-4 = 10 \Rightarrow n = 7$

Nos piden:

$n^2 = 7^2 = 49$

Clave B

Resolución de problemas

9. $\dfrac{(x^4)^{15}-(y^2)^{15}}{x^4-y^2} \Rightarrow$ n.° términos = 15

$t_k = (x^4)^{15-k}(y^2)^{k-1}$

$GA = 4(15-k)+2(k-1)$

$34 = 60-4k+2k-2 = 58-2k$

$2k = 58-34$

$2k = 24$

$\therefore k = 12$

Clave A

10. $\dfrac{x^{4n}-y^{5n}}{x^4-y^5} = \dfrac{(x^4)^n-(y^5)^n}{(x^4)-(y^5)}$

$t_5 = (x^4)^{n-5} \cdot (y^5)^{5-1}$

$t_5 = x^{4n-20} \cdot y^{20}$

Grado absoluto $= 4n-20+20 = 32$

$\therefore n = 8$

Clave E

Nivel 2 (página 27) Unidad 1

Comunicación matemática

11.

$x = bc;\ a = z;$ $\dfrac{-}{-};\ n = 4$	$\dfrac{b^4c^4-z^4}{bc-z} = b^3c^3 + b^2c^2z + bcz^2 + z^3$
$x = m^2,\ a = 1;$ $\dfrac{+}{+};\ n = 3$	$\dfrac{m^6+1}{m^2+1} = m^4-m^2+1$
$x = p,\ a = q^3$ $\dfrac{-}{+};\ n = 4$	$\dfrac{p^4-q^{12}}{p+q^3} = p^3-p^2q^3+pq^6-q^9$
$x = \sqrt[15]{x};\ a = \sqrt[35]{y};$ $\dfrac{-}{-};\ n = 5$	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[7]{9}}{\sqrt[15]{x}-\sqrt[35]{y}} = (\sqrt[15]{x})^4 + (\sqrt[15]{x})^3\sqrt[35]{y} + (\sqrt[15]{x})^2(\sqrt[35]{y})^2 + \sqrt[15]{x}(\sqrt[35]{y})^3 + (\sqrt[35]{y})^4$

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. $\dfrac{x^m-y^n}{x^a+y^b}$

$\dfrac{m}{a} = \dfrac{n}{b} = 3b$

$\dfrac{m+n}{a+b} = 3b$

Reemplazando los datos:

$\Rightarrow \dfrac{18}{3} = 3b \Rightarrow b = 2$

Además:

$a + \dfrac{b}{2} = 3$ (dato)

$\Rightarrow a = 1$

Piden:

$t_4 = -(x^a)^{6-4}(y^b)^{4-1} = -(x^1)^2(y^2)^3$

$\therefore t_4 = -x^2y^6$

Clave C

15. $\dfrac{(\sqrt{x})^{35}-(\sqrt[3]{x})^{35}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

$t_k = (\sqrt{x})^{35-k}(\sqrt[3]{x})^{k-1}$; $(k < 35)$

$t_k = x^{\frac{35-k}{2}} \cdot x^{\frac{k-1}{3}} = x^{\frac{103-k}{6}}$

$\Rightarrow 103-k = \overset{\circ}{6}$

$(\overset{\circ}{6}+1)-k = \overset{\circ}{6}$

$1-k = \overset{\circ}{6}$

$\Rightarrow k-1 = \overset{\circ}{6}$

$k = \overset{\circ}{6} + 1$

$$\left.\begin{matrix} 6.0 \\ 6.1 \\ \vdots \\ 6.5 \end{matrix}\right\} \text{6 términos}$$

Por lo tanto:
Hay 6 términos racionales enteros.

Clave B

16. Sea

$n = \dfrac{a+b}{a-b}$ ...(1)

(n: n.° términos)

$t_4 = (x^{a-b})^{n-4}(y^{a-b})^3 = x^{40}y^{60}$

$\Rightarrow (a-b)(n-4) = 40 \wedge (a-b).3 = 60$

$\Rightarrow a - b = 20$ ...(2)

Además: $20(n-4) = 40 \Rightarrow n = 6$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$\Rightarrow a + b = 120$ ...(4)

De (2) y (4):

$\Rightarrow a = 70 \wedge b = 50$

$\therefore a - 2b = 70 - 2(50) = -30$

Clave E

17. $\dfrac{4n+12}{n-8} = \dfrac{4n-3}{n-9}$ ...(1)

$(4n+12)(n-9) = (4n-3)(n-8)$

$4n^2 - 36n + 12n - 108 = 4n^2 - 32n - 3n + 24$

$4n^2 - 24n - 108 = 4n^2 - 35n + 24$

$11n = 132$

$\Rightarrow n = 12$

Reemplazamos n = 12 en (1):

$\therefore \text{n.° términos} = \dfrac{4(12)+12}{12-8} = 15$

Clave C

18. $\dfrac{x^m - y^n}{x^2 - y}$

Si genera un C. N., se cumple:

$\dfrac{m}{2} = n \Rightarrow m = 2n$

Luego: $\dfrac{x^m - y^n}{x^2 - y} = \dfrac{(x^2)^n - y^n}{(x^2) - y}$

Sabemos que:

$t_3 = (x^2)^{n-3}.y^{3-1}$

$t_3 = x^{2n-6}.y^2 = x^{36}.y^2$

Igualamos: $2n - 6 = 36 \Rightarrow n = 21$

Nos piden:

$t_5 = (x^2)^{n-5}.y^{5-1}$

$t_5 = (x^2)^{21-5}.y^4 = x^{32}.y^4$

Clave C

19. $\dfrac{x^{16m+96} - y^{p^2}}{x^8 + y^p}$

$\Rightarrow \text{n.° términos} = \dfrac{16m+96}{8} = \dfrac{p^2}{p}$

n.° términos $= 2m + 12 = p$ ...(1)

$\dfrac{x^{m^2+2m} - y^{n^2}}{x^m - y^n}$

$\Rightarrow \text{n.° términos} = \dfrac{m^2+2m}{m} = \dfrac{n^2}{n}$

n.° términos $= m + 2 = n$ ...(2)

Del enunciado:

$2m + 12 = 3(m+2)$

$2m + 12 = 3m + 6 \Rightarrow m = 6$

Reemplazando m = 6 en (1) y (2):

$\Rightarrow p = 24 \wedge n = 8$

$\therefore m + n + p = 38$

Clave A

Nivel 3 (página 28) Unidad 1

Comunicación matemática

20.

Razonamiento y demostración

21. Dándole forma adecuada al dividendo y al divisor:

$$\frac{(x^4)^{39} + (x^4)^{38} + (x^4)^{37} + ... + x^4 + 1}{(x^2)^{39} + (x^2)^{38} + (x^2)^{37} + ... + x^2 + 1 + \dfrac{2}{x^2-1}}$$

$$\frac{\dfrac{(x^4)^{40} - 1}{x^4 - 1}}{\dfrac{(x^2)^{40} - 1}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x^2 - 1}} = \frac{x^{80} - 1}{x^2 + 1}$$

Clave A

22. $\dfrac{(x+y)^{60} - (x-y)^{60}}{8xy(x^2+y^2)}$

Recuerda: $(x+y)^4 - (x-y)^4 = 8xy(x^2+y^2)$

Luego:

$\dfrac{(x+y)^{60} - (x-y)^{60}}{(x+y)^4 - (x-y)^4}$

Nos piden:

$t_4 = \{(x+y)^4\}^{15-4}.\{(x-y)^4\}^{4-1}$

$t_4 = (x+y)^{44}.(x-y)^{12}$

V. N. t_4 cuando $x + y = 1 \wedge x - y = \sqrt[3]{5}$

V. N. $t_4 = (1)^{44}.(\sqrt[3]{5})^{12} = 5^4 = 625$

Clave C

23. $\dfrac{x^{75} - y^{100}}{x^3 - y^4} = \dfrac{(x^3)^{25} - (y^4)^{25}}{(x^3) - (y^4)}$

Calculamos:

$t_k = (x^3)^{25-k}.(y^4)^{k-1}$

$t_k = x^{75-3k}.y^{4k-4}$

- $\dfrac{x^{102} - y^{68}}{x^3 - y^2} = \dfrac{(x^3)^{34} - (y^2)^{34}}{(x^3) - (y^2)}$

Calculamos:

$t_p = (x^3)^{34-p}.(y^2)^{p-1}$

$t_p = x^{102-3p}.y^{2p-2}$

Dato: $t_k \equiv t_p$

Se cumple:

$75 - 3k = 102 - 3p$

$p - k = 9$ ...(I)

$4k - 4 = 2p - 2$

$2k - p = 1$ ...(II)

Resolvemos (I) $\wedge$ (II).

$k = 10 \wedge p = 19$

Nos piden: $t_k = x^{45}.y^{36}$

Clave B

24.

25. Debe cumplirse:

$\dfrac{2a+1}{a-4} = \dfrac{a+3}{a-5}$ ...(1)

$\Rightarrow 2a^2 - 10a + a - 5 = a^2 + 3a - 4a - 12$

$2a^2 - 9a - 5 = a^2 - a - 12$

$a^2 - 8a + 7 = 0$

a ╲╱ −7
a ╱╲ −1

$\Rightarrow a = 7 \vee a = 1$

El único valor de a que satisface (1) es 7, pues el n.° términos es positivo.

$\therefore a = 7$

Clave C

26. $\dfrac{x^a + y^b}{x^2 - y^5}$

Si genera un C. N. se cumple:

$\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{5} = p \Rightarrow a = 2p \wedge b = 5p$

Luego:

$\dfrac{x^a - y^b}{x^2 - y^5} = \dfrac{x^{2p} - y^{5p}}{x^2 - y^5} = \dfrac{(x^2)^p - (y^5)^p}{(x^2) - (y^5)}$

Sea el término central t_k:

$t_k = t_{\frac{p+1}{2}} = (x^2)^{p - \frac{p+1}{2}}.(y^5)^{\frac{p+1}{2} - 1}$

$t_{\frac{p+1}{2}} = x^{p-1}.y^{\frac{5(p-1)}{2}} = x^c.y^{120}$

Igualamos:

$5\frac{(p-1)}{2} = 120 \Rightarrow p = 49$

$c = p - 1 \Rightarrow c = 49 - 1 = 48$

Sabemos que:

$a = 2p = 2(49) = 98$

$b = 5p = 5(49) = 245$

Nos piden: $a + b + c = 98 + 245 + 48 = 391$

Clave D

27. $\frac{x^{np} - y^p}{x^n - y} = \frac{(x^n)^p - y^p}{(x^n) - y}$

Sabemos que:

$t_{40} = (x^n)^{p-40} . y^{40-1}$

$G.A.t_{40} = n(p - 40) + 39 = 87$

$n(p - 40) = 48$ ...(I)

Sea:

$t_k = (x^n)^{p-k} . y^{k-1}$

$t_{k+1} = (x^n)^{p-k-1} . y^k$

$G.A.t_k = n(p - k) + k - 1$

$G.A.t_{k+1} = n(p - k - 1) + k$

Dato:

$n(p - k) + k - 1 - n(p - k - 1) - k = 3$

$n = 4$

Reemplazamos en (I):

$4(p - 40) = 48 \Rightarrow p = 52$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 29) Unidad 1

1. Factorizamos 3^{10} en el numerador:

$$\sqrt[5]{\frac{3^{10}.(3^{m-9} + 3^{m-8} + 3^{m-7} + 3^{m-6})}{3^{m-6} + 3^{m-7} + 3^{m-8} + 3^{m-9}}}$$

Simplificamos:

$\sqrt[5]{3^{10}} = 3^2 = 9$

Clave B

2. Del dato $\sqrt[3^3]{a^{a^{12}}} = 3$

$(a^{a^{12}})^{12} = (3^{3^3})^{12}$

$(a^{12})^{a^{12}} = (3^{3^3})^{3.4} = (3^4)^{3^4}$

$\Rightarrow a^{12} = 3^4$

$a = 3^{4/12} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$

Clave D

3. I. Sean los irracionales:

$3 + \sqrt{2}$

$3 - \sqrt{2}$

6 (F)

II. $8 \lfloor -3$

$1 \quad -2 \qquad 1 > d$ (F)

III. $\sqrt{x^2} = |x|$ (F)

4. Operamos por aspa doble (usamos artificio):

$T^5 + T^4 + T^3 + T^2 - T^3 + T^2 - 1$

$T^2 \qquad T \qquad -1$

$T^3 \qquad T \qquad 1$

Los factores son:

$(T^2 + T - 1)(T^3 + T + 1)$

Clave B

5. Sabemos $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ... (I)

Como el polinomio es completo y ordenado:

$ab = 1$

$a - b = 2$

En (I):

$(2)^2 = a^2 - 2\underbrace{(ab)}_{1} + b^2$

$a^2 - b^2 = 6 \qquad \therefore P(0) = a^2 + b^2 = 6$

Clave A

6. Piden el máximo valor entero de: $(a + 3)(b + 1)$

Sea: $a + 3 = m$; $b + 1 = n$

Si m y $n \in \mathbb{R}^+$:

$\Rightarrow \frac{m + n}{2} \geq \sqrt{mn}$

Reemplazando:

$\frac{(a + 3) + (b + 1)}{2} \geq \sqrt{(a + 3)(b + 1)}$

$\frac{\overbrace{a + b}^{5} + 4}{2} \geq \sqrt{(a + 3)(b + 1)}$

$\frac{9}{2} \geq \sqrt{(a + 3)(b + 1)}$

$(a + 3)(b + 1) \leq 20{,}25$

$\therefore$ Máximo valor en los $\mathbb{Z}$: 20

Clave D

7. $S_1 = -\frac{coef.(x^{34-1})}{CP}$;

coeficiente principal (CP) = 12

$S_2 = \frac{coef.(x^{34-2})}{CP}$

$S_3 = -\frac{coef.(x^{34-3})}{CP}$

$\vdots \qquad \vdots$

$S_k = (-1)^k \frac{coef.(x^{34-k})}{CP}$

$\Rightarrow S_{12} = \frac{coef.(x^{34-12})}{CP} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$S_{31} = -\frac{coef.(x^{34-31})}{CP} = \frac{5}{12}$

$S_{34} = \frac{coef.(x^0)}{CP} = \frac{3}{12}$

$\therefore$ Piden $\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = 1$

Clave E

8. $2^x + 2 . 3^{x+y} = 56$ ... (1)

$3 . 2^x + 3^{x+y+1} = 87$ ... (2)

Multiplicando (1) por 3:

$3 . 2^x + 2 . 3^{x+y+1} = 168$ ... (3)

(3) – (2):

$3^{x+y+1} = 81 = 3^4$

$\Rightarrow x + y = 3$

En (1): $2^x + 2 . 3^3 = 56$

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 2$

$\therefore 3x - 2y = -1$

Clave D

9. $M = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)\frac{2}{2}$

$M = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2)$

$M = \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{2}$

Del dato: $a - b = \sqrt{2}$

$b - c = \sqrt{2}$ } +

$a - c = 2\sqrt{2}$

En M: $M = \frac{2 + 2 + 8}{2} = 6$

Clave B

10. Del dato: $m = kx$

$n = ky$

Entonces: $\underbrace{\frac{m^3}{a^3} + \frac{n^3}{b^3}} = \frac{k^3x^3}{a^3} + \frac{k^3y^3}{b^3}$

Sea P lo que piden: $P = k^3\underbrace{\left(\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3}\right)}_{1}$

Del dato

$\frac{m^3 + n^3}{x^3 + y^3} = k^3 = P$

Clave E

11. La suma de sus grados es:

$1 + 2 + 3 + ... + 3n - 1$ → exponentes de x

$1 + 2 + 3 + ... + 3n - 1$ → exponentes de y

$2(1 + 2 + 3 + ... + 3n - 1)$

$2\frac{(3n - 1)(3n)}{2} = \underbrace{702}_{26 \times 27}$

$\Rightarrow 3n = 27$

$n = 9$

El grado es: $3n - 1 = 26$

Clave E

FACTORIZACIÓN

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 32) Unidad 2

1. $P(x; y) = x^5 + xy^4 + y^5$
$P(x; y) = x^5 - x^2y^3 + xy^4 + x^2y^3 + y^5$
$P(x; y) = x^2(x^3 - y^3) + y^3(xy + x^2 + y^2)$
$P(x; y) = x^2(x - y)(x^2 + xy + y^2) + y^3(x^2 + xy + y^2)$
$P(x; y) = (x^2 + xy + y^2)(x^3 - x^2y + y^3)$

Clave C

2. $P(a; b) = a^3 + b^3 - ab(a + b) - c^2(a + b)$
$P(a; b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) - c^2(a + b)$
$= (a + b)(\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} - c^2)$
$\Rightarrow P(a; b) = (a + b)[(a - b)^2 - c^2]$
$= (a + b)(a - b + c)(a - b - c)$
$\therefore$ Suma de factores primos: $3a - b$

Clave E

3. $P(x; y; z) = x^3y(zx - y^2) + y^3z(xy - z^2) + z^3x(yz - x^2)$
$= x^4yz - x^3y^3 + y^4zx - y^3z^3 + xyz^4 - z^3x^3$
$= -y^3(x^3 + z^3) + xyz(x^3 + z^3) + y^4zx - z^3x^3$
$= y(x^3 + z^3)(xz - y^2) + zx(y^4 - z^2x^2)$
$= y(x^3 + z^3)(xz - y^2) + zx(y^2 + zx)(y^2 - zx)$
$= (xz - y^2)[yx^3 + yz^3 - zx(y^2 + zx)]$
$= (xz - y^2)[yx^3 + z^3y - zxy^2 - x^2z^2]$
$= (xz - y^2)[xy(x^2 - zy) - z^2(x^2 - yz)]$
$= (xz - y^2)(x^2 - zy)(xy - z^2)$
$= -(y^2 - xz)(zy - x^2)(z^2 - xy)$
$\therefore$ Un factor primo es: $z^2 - xy$

Clave E

4. $R(x) = x^5 + x^4 + \underbrace{2x^2}_{x^2 + x^2} + 1$
$= x^5 + x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x + x$
$= x^2(x^3 + 1) + x^4 + x + x^2 - x + 1$
$= x^2(x^3 + 1) + x(x^3 + 1) + x^2 - x + 1$
$= x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) + x(x + 1)(x^2 - x + 1) + x^2 - x + 1$
$= (x^2 - x + 1)(x^2(x + 1) + x(x + 1) + 1)$
$= (x^2 - x + 1)\underbrace{(x^3 + 2x^2 + x + 1)}_{\text{evaluamos aquí } x = 3}$
$\therefore (3)^3 + 2(3)^2 + 3 + 1 = 49$

Clave B

5. $(x + y + z)(xy + xz + yz) - xyz$
$= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xzy + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 - xyz$
$= x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + xyz + xyz$
$= xy(x + y) + xz(x + z) + zy(y + z) + xyz + xyz$
$= xy(x + y + z) + xz(x + z + y) + zy(y + z)$
$= x(x + y + z)(y + z) + zy(y + z)$
$= (z + y)(x^2 + xy + zx + zy)$
$= (z + y)(x(x + z) + y(x + z))$
$= (z + y)(x + z)(x + y)$
$\therefore \Sigma$ de factores primos $= 2(x + y + z)$

Clave E

6. $K(m; n) = m^3 + 3m^2n + 6mn^2 + 18n^3$
Agrupando:
$K(m; n) = m^2(m + 3n) + 6n^2(m + 3n)$
$= \underbrace{(m + 3n)}_{\text{factor primo en cuestión}}(m^2 + 6n^2)$
Por dato: $am + bn = m + 3n$
$\Rightarrow a = 1 \wedge b = 3$
Piden: $\sqrt{a + b} = \sqrt{4} = 2$

Clave C

7. $P(a; b; c) = (a + b + c)(ab + ac + bc) - abc$
Operando y agrupando:
$= a^2(b + c) + a(b + c)^2 + b^2c + bc^2$
$= a^2(b + c) + a(b + c)^2 + bc(b + c)$
$= (b + c)(a^2 + a(b + c) + bc)$

$$\begin{matrix} a & \times & b \\ a & & c \end{matrix}$$

$\therefore P(a; b; c) = (b + c)\underbrace{(a + b)}_{\text{factor primo}}(a + c)$

Clave A

8. $F(x) = 9(3x^2 - 4)^2 - 4(2x^2 + 2)^2$
$= [3(3x^2 - 4) + 2(2x^2 + 2)][3(3x^2 - 4) - 2(2x^2 + 2)]$
$= [13x^2 - 8][5x^2 - 16]$
$= \left(\sqrt{13}x + \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{13}x - \sqrt{8}\right)\left(\sqrt{5}x + 4\right)\left(\sqrt{5}x - 4\right)$
$R(x) = 8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$
$P(x; y) = x^4 + 14x^2 + 49 - y^2$
$= (x^2 + 7)^2 - y^2 = (x^2 + y + 7)(x^2 - y + 7)$
$M(x; y) = x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6$
$= x^2(x^4 - y^4) + y^2(y^4 - x^4)$
$= (x^4 - y^4)(x^2 - y^2)$
$= (x^2 + y^2)(x + y)^2(x - y)^2$

9. $F(x; y) = 16x^{12}y^3 - 20x^8y^7 + 4x^4y^{11}$
Factor común:
$F(x; y) = 4x^4y^3(4x^8 - 5x^4y^4 + y^8)$

$$\begin{matrix} 4x^4 & \times & -y^4 \\ x^4 & & -y^4 \end{matrix}$$

$F(x; y) = 4x^4y^3(4x^4 - y^4)(x^4 - y^4)$
$F(x; y) = 4x^4y^3(2x^2 + y^2)(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
$F(x; y) = 4x^4y^3(2x^2 + y^2)(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
Σ coeficientes de un factor es: $2 - 1 = 1$

Clave A

10. $R(a) = a^8 - 12a^4 + 16$
Dando forma:
$R(a) = a^8 - 8a^4 + 16 - 4a^4$
$R(a) = (a^4 - 4)^2 - (2a^2)^2$
$R(a) = (a^4 + 2a^2 - 4)(a^4 - 2a^2 - 4)$
Luego, el producto de términos independientes de los factores primos es: $-4 \cdot -4 = 16$

Clave B

11. $F(x) = (x^2 + 5)^2 + 13x(x^2 + 5) + 42x^2$

$$\begin{matrix} (x^2 + 5) & \times & 6x \\ (x^2 + 5) & & 7x \end{matrix}$$

$F(x) = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 7x + 5)$

$$\begin{matrix} x & \times & 5 \\ x & & 1 \end{matrix}$$

$= (x + 5)(x + 1)(x^2 + 7x + 5)$
Σ coef. F.P. $= \{6; 2; 13\}$
Hay dos respuestas.

Clave E

12. $G(x) = (x^2 + 6)^2 + 3x(x^2 + 6) - 10x^2$

$$\begin{matrix} (x^2 + 6) & \times & 5x \\ (x^2 + 6) & & -2x \end{matrix}$$

$G(x) = (x^2 + 5x + 6)(x^2 - 2x + 6)$

$$\begin{matrix} x & \times & 3 \\ x & & 2 \end{matrix}$$

$= (x + 2)(x + 3)(x^2 - 2x + 6)$
$\Rightarrow$ El factor primo cuadrático es: $x^2 - 2x + 6$

Clave A

13. $P(x) = (6x^2)^2 - 61x^2 + 25$

$$\begin{matrix} 36x^2 & \times & -25 \\ x^2 & & -1 \end{matrix}$$

$= (36x^2 - 25)(x^2 - 1)$
$= (6x + 5)(6x - 5)(x + 1)(x - 1)$

$F(x; y) = x^2(x - y)^2 - 14xy^2(x - y) + 24y^4 + 25y^4 - 25y^4$
$= x^2(x - y)^2 - 14xy^2(x - y) + 49y^4 - 25y^4$
$= (x(x - y) - 7y^2)^2 - (5y^2)^2$
$= (x^2 - xy - 7y^2 + 5y^2)(x^2 - xy - 7y^2 - 5y^2)$
$= (x^2 - xy - 2y^2)(x^2 - xy - 12y^2)$

$R(x; y) = x^4 + y^4 - 4xy(x^2 + y^2) + 5x^2y^2 + x^2y^2 - x^2y^2$
$= x^4 + y^4 - 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 - x^2y^2$
$= [(x^2 + y^2) - 2xy]^2 - x^2y^2$
$= [x^2 + y^2 - 2xy + xy][x^2 + y^2 - 2xy - xy]$
$= [x^2 + y^2 - xy][x^2 + y^2 - 3xy]$

$A(a; b) = (a + b)^4 - (a - b)^4$
$= [(a + b)^2 + (a - b)^2][(a + b)^2 - (a - b)^2]$
$= 2(a^2 + b^2)(4ab)$
$= 8ab(a^2 + b^2)$

14. Factorizamos cada polinomio:
$P(x) = x^2(x^2 + 3)^2 - (3x^2 + 1)^2$
$= (x^3 + 3x)^2 - (3x^2 + 1)^2$
$= (x^3 + 3x + 3x^2 + 1)(x^3 + 3x - 3x^2 - 1)$
$\Rightarrow P(x) = (x + 1)^3(x - 1)^3$
$Q(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

$$\begin{matrix} x^2 & \times & 3 \\ x^2 & & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow Q(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 1)$
$Q(x) = (x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$
$\therefore$ El factor común cuadrático es:
$(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 34) Unidad 2

Comunicación matemática

1. B – C – G – D – E – H – F – A

2. I. D II. 7

Razonamiento y demostración

3. $N(x) = (\underbrace{x^2 + x}_{a} - 6)(\underbrace{x^2 + x}_{a} - 2) + 3$

$= (a - 6)(a - 2) + 3$

$= a^2 - 8a + 12 + 3$

$= a^2 - 8a + 15 = (a - 5)(a - 3)$

$N(x) = (x^2 + x - 5)(x^2 + x - 3)$

$\therefore\ \Sigma$ factores primos $= 2x^2 + 2x - 8$

Clave E

4. $x^5 + x + 1$

$x^5 + x^2 + x + 1 - x^2$

$x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$

$x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1$

$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 + x + 1$

Clave A

5. Agrupamos convenientemente:

$R(x) = x^{n+7} - x^{n+6} + x^{n+3} - x^{n+2} + x - 1$

$= x^{n+6}(x - 1) + x^{n+2}(x - 1) + (x - 1)$

$= (x - 1)(x^{n+6} + x^{n+2} + 1)$

Un factor primo es: $x - 1$

Clave E

6. $(x^4 + x^2)(x^3 + x) + (x^4 + x^2) + (x^3 + x) + 1$

$= (x^4 + x^2)(x^3 + x + 1) + (x^3 + x + 1)$

$= (x^3 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$

$= (x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\therefore$ N.° F.P. cuadráticos = 2

Clave E

7. $R(x) = x^2 - b^2 + 2ax + a^2$

Agrupamos:

$R(x) = (x + a)^2 - b^2$

$= (x + a + b)(x + a - b)$

Como: $a > 0 \ \wedge\ b < 0$

$\therefore$ El factor primo de mayor término independiente es $(x + a - b)$.

Clave E

8. $F(x; y) = xy(x^3 - xy^2 - x^2y + y^3)$

$= xy(x^3 + y^3 - xy(y + x))$

$= xy[(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y)]$

$= xy(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy)$

$= xy(x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$

$= xy(x + y)(x - y)^2$

Factores primos binomios $= 2$

Clave B

Resolución de problemas

9. Dato:

M; N; P; Q y R son consecutivos cuya suma es 15.

$M = a - 3$ $P = a - 1$ $R = a + 1$

$N = a - 2$ $Q = a$

$M + N + P + Q + R = 5a - 5 = 15 \Rightarrow a = 4$

Reemplazamos:

$A(x; y) = 1 + 2x^2 + 3y^2 + 4y + 5xy + 3x$

Agrupamos:

$A(x; y) = 2x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x + 4y + 1$

2x   3y   1
x   y   1

$A(x; y) = (\underbrace{2x + 3y + 1}_{\text{suma de coef. 6}})(\underbrace{x + y + 1}_{\text{suma de coef. 3}})$

Clave D

10. $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

Por divisores binómicos:

PCR. $= \pm\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

	1	5	–2	–24
x = –4		–4	–4	24
	1	1	–6	0

1   3
1   –2

Luego: $P(x) = (x + 4)(x + 3)(x - 2)$

Nos piden Σ.T. I. factores primos $= 4 + 3 - 2 = 5$

Clave C

Nivel 2 (página 35) Unidad 2

Comunicación matemática

11. $x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x + 1$

$(x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1)$

$x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

A) Tiene dos factores primos (C)

$\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{1.°}\underbrace{(x^3 - x^2 + 1)}_{2.°}$

B) Tiene un factor de segundo grado: (C)
$x^2 + x + 1$

C) Tiene un factor de tercer grado: (C)
$x^3 - x^2 + 1$

D) Σcoef. $(x^3 - x^2 + 1) = 1 - 1 + 1 = 1$ (I)

E) Σcoef. $(x^2 + x + 1) = 1 + 1 + 1 = 3$ (C)

Clave D

12. $21x^2 + 22x + 5$

7x   5   15x
3x   1   7x
         22x

a = 5, b = 3; c = 1; d = 22
Cumple con la condición:
a + b + c + d = 31

$\Rightarrow\ 3x + 1 - 7x - 5 = -4x - 4 = -4(x + 1)$

Clave D

Razonamiento y demostración

13. $T(x) = x^5 + x + 1$

Esta expresión también se puede expresar como:

$T(x) = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$

Factorizamos:

$x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$(x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$

$\Rightarrow T(x) = (x^2 + x + 1)\underbrace{(x^3 - x^2 + 1)}_{\text{factor primo}}$

Clave E

14. $A = (\underbrace{x^2 - 2x}_{a} - 3)(\underbrace{x^2 - 2x}_{a} - 24) + 38$

$(a - 3)(a - 24) + 38$

$a^2 - 27a + 110$

a   –22
a   –5

$A = (a - 22)(a - 5)$

$= (x^2 - 2x - 22)(x^2 - 2x - 5)$

↑ Término independiente

Clave B

15. Aplicamos criterio a evaluar:

PCR $= \pm\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}$

Tomamos –5:

	1	4	–17	–60
–5		–5	5	60
	1	–1	–12	0

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 - 17x - 60 = (x - (-5))(x^2 - x - 12)$

x   3
x   –4

$= (x + 5)(x + 3)(x - 4)$

$\therefore$ Un factor primo es: $x + 3$

Clave E

16. $M(x; y) = 2x^2 + 7xy - 15y^2 - 6x + 22y - 8$

2x   –3y   2
x   5y   –4

$= (2x - 3y + 2)(x + 5y - 4)$

Nos piden el producto de coeficientes de los factores primos:

$2 \times -3 \times 2 \times 1 \times 5 \times -4 = 240$

Clave D

17. $N(x) = (x - 1)^4 + (x - 1)^2 - 6$

$(x - 1)^2$ 3
$(x - 1)^2$ –2

$\Rightarrow N(x) = [(x - 1)^2 + 3][(x - 1)^2 - 2]$

$N(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1)$

Dato:

$(ax^b + cx + d)$ es un factor primo de N(x); d es par.

$\Rightarrow$ Comparamos:

$(ax^b + cx + d) = x^2 - 2x + 4$

$a = 1; b = 2; c = -2; d = 4$

Nos piden: $a + b + c + d = 5$

Clave E

18. $P(a;b)=(a^2+b^2)(a^2+b^2+6ab)+5a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)6ab+5a^2b^2$

(a^2+b^2) ⟍⟋ $5ab$

(a^2+b^2) ⟋⟍ ab

$\Rightarrow P(a;b)=\underbrace{(a^2+b^2+5ab)}_{\text{producto de términos: }5a^3b^3}\underbrace{(a^2+b^2+ab)}_{\text{producto de términos: }a^3b^3}$

Clave A

Resolución de problemas

19. $P(x)=x^5+5x^4+10x^3+11x^2+7x+2$

Por divisores binómicos:

PCR $=\pm\{1;2\}$

	1	5	10	11	7	2
x = −1		−1	−4	−6	−5	−2
	1	4	6	5	2	0

Por aspa doble especial:

$P(x)=(x+1)(x^4+4x^3+6x^2+5x+2)$

x^2 ⟍⟋ $3x$ ⟍⟋ 2

x^2 ⟋⟍ x ⟋⟍ 1

$P(x)=(x+1)(x^2+3x+2)(x^2+x+1)$

x ⟍⟋ 2

x ⟋⟍ 1

$P(x)=(x+1)^2(x+2)(x^2+x+1)$

Σcoef. F. P. mónico cuadrático $=1+1+1=3$

Clave D

20. Aplicamos criterio a evaluar.

Como el polinomio es mónico, se trabaja con los divisores del término independiente:

$\pm$ {1; 2; 5; 10}. Utilizamos el esquema Ruffini.

	1	−4	−7	10
1		1	−3	−10
	1	−3	−10	0

$\Rightarrow$ división exacta

Luego:

$x^3-4x^2-7x+10=(x-1)(x^2-3x-10)$

x ⟍⟋ -5

x ⟋⟍ $+2$

$\Rightarrow x^3-4x^2-7x+10=\underbrace{(x-1)(x-5)(x+2)}_{\text{factores primos}}$

$\therefore$ Suma de factores primos es: $3x-4$

Clave B

Nivel 3 (página 35) Unidad 2

Comunicación Matemática

21. $3x^4+Mx^3+13x^2+Px+10$

$3x^2$ ⟍⟋ $2x$ | x ⟍⟋ 5

x^2 ⟋⟍ x | $2x$ ⟋⟍ 2

- $\begin{array}{r}5x^2\\6x^2\\\hline 11x^2\end{array}$ $\begin{array}{r}2x^3\\3x^3\\\hline 5x^3\end{array}=Mx^3$ $\begin{array}{r}5x\\4x\\\hline 9x\end{array}=Px$

  $2x^2$ $\Rightarrow M=5\ \wedge\ P=9$

- $\begin{array}{r}x^3\\6x^3\\\hline 7x^3\end{array}=Mx^3$ $\begin{array}{r}10x\\2x\\\hline 12x\end{array}=Px$

  $\Rightarrow M=7\ \wedge\ P=12$

$\Rightarrow M=\{5;7\}$

$P=\{9;12\}$

Clave C

22. $A_{(p;q;r)}=(p^2q^2r^2-r^2q^3)+(p^3r-pqr)+(q^3p-q^2p^3)+(r^3q-p^2r^3)$

$A_{(p;q;r)}=(p^2-q)(q^2r^2+pr-q^2p-r^3)$

$\boxed{A_{(p;q;r)}=(p^2-q)(q^2-r)(r^2-p)}$

$A_{(p;q;r)}=p^3(q^2-r^2)+q^2r^2(q-r)-p^2(q^3-r^3)$

$\boxed{A_{(p;q;r)}=(q-r)(p-q)(p-r)(pq+qr+pr)}$

$A_{(p;q;r)}=(p^4qr+q^3r^3+2p^2q^2r^2)+(q^4pr+p^3q^3)+(r^4pq+p^3r^3)$

$\boxed{A_{(p;q;r)}=(p^2+qr)(r^2+pq)(q^2+pr)}$

Razonamiento y demostración

23. $E(x)=(x^2-9x+20)(x^2+5x+6)-60$

x ⟍⟋ -4 x ⟍⟋ 3

x ⟋⟍ -5 x ⟋⟍ 2

$E(x)=(x-4)(x-5)(x+3)(x+2)-60$

Agrupando:

$(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)-60$ ...(1)

Sea: $x^2-2x=a$

En (1)

$\Rightarrow (a-8)(a-15)-60$

$a^2-23a+60$

a ⟍⟋ -20

a ⟋⟍ -3

$=(a-20)(a-3)$

Reemplazamos el valor de **a**:

$(x^2-2x-20)(x^2-2x-3)$

x ⟍⟋ -3

x ⟋⟍ $+1$

$\therefore\ E(x)=(x^2-2x-20)\underbrace{(x-3)}_{\text{factor primo}}(x+1)$

Clave D

24. $[(x+4)(x+3)][(x+2)(x+5)]-24$

$(x^2+7x+12)(x^2+7x+10)-24$

Sea $\mathbf{a}=x^2+7x$:

$(a+12)(a+10)-24$

$a^2+22a+120-24$

$a^2+22a+96$

a ⟍⟋ 16

a ⟋⟍ 6

$\Rightarrow (a+16)(a+6)$

$(x^2+7x+16)(x^2+7x+6)$

x ⟍⟋ 6

x ⟋⟍ 1

$\Rightarrow (x^2+7x+16)(x+6)(x+1)$

$\therefore$ Un factor primo es: $x+1$

Clave B

25. $M(x)=x^3-7xa^2-6a^3$

$x=-a$; hace cero a la ecuación.

Luego:

	1	0	$-7a^2$	$-6a^3$
x = −a		$-a$	a^2	$6a^3$
	1	$-a$	$-6a^2$	0

$M(x)=(x+a)(x^2-ax-6a^2)$

x ⟍⟋ $-3a$

x ⟋⟍ $2a$

$M(x)=(x+a)(x-3a)(x+2a)$

$\therefore\ a-3a+2a=0$

Clave B

26. $B(x)=x^5-2x^4-6x^3+8x^2+5x-6$

Factorizamos por Ruffini:

	1	−2	−6	+8	+5	−6
1		1	−1	−7	1	6
	1	−1	−7	1	6	0
−1		−1	2	5	−6	
	1	−2	−5	6	0	
3		3	3	−6		
	1	1	−2	0		

$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x-3)(x^2+x-2)$

x ⟍⟋ $+2$

x ⟋⟍ -1

$(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)(x-1)$

$\therefore B(x)=\underbrace{(x-1)^2(x+1)(x-3)(x+2)}_{\text{4 factores primos}}$

Clave D

27. $P(x)=x^4+2x^2+9$

$P(x)=x^4+0x^3+2x^2+0x+9$

x^2 ⟍⟋ $2x$ ⟍⟋ 3 $\quad 3x^2$

x^2 ⟋⟍ $-2x$ ⟋⟍ 3 $\quad 3x^2$

$\quad\quad\quad\quad 6x^2$

Falta: $-4x^2$

$\Rightarrow P(x)=\underbrace{(x^2+2x+3)}_{\text{suma de coef.: 6}}\underbrace{(x^2-2x+3)}_{\text{suma de coef.: 2}}$

Clave B

28. $P(a; b) = a^4 + b^4 + a^2b^2$

Sumando y restando: a^2b^2

$P(a; b) = \underbrace{a^4 + b^4 + 2a^2b^2} - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$\Rightarrow P(a; b) = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

$\therefore$ Número de factores primos: 2

Clave B

Resolución de problemas

29. $P(x) = (x + y)(x + y + 2)(x + y + 1)(x + y + 3) - 8$

Sea: $x + y = a$

$\Rightarrow P(x) = a(a + 2)(a + 1)(a + 3) - 8$

$= a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a - 8$

$a^2 \quad 3a \quad 4 \qquad 4a^2$

$a^2 \quad 3a \quad -2 \qquad -2a^2$

$\qquad\qquad\qquad\quad 2a^2$

Falta: $9a^2$

$\Rightarrow P(x) = (a^2 + 3a + 4)(a^2 + 3a - 2)$

Reemplazamos el valor de a:

$P(x) = [(x + y)^2 + 3(x + y) + 4]\,[(x + y)^2 + 3(x + y) - 2]$

$\therefore P(x) = (x^2 + x(2y + 3) + y^2 + 3y + 4)(x^2 + x(2y + 3) + y^2 + 3y - 2)$

Clave C

30. $P(y) = y^7 + 5y^6 + 8y^5 + 6y^4 + 6y^3 + 8y^2 + 5y + 1$

$= y^7 + y^4 + 5y^6 + 8y^5 + 5y^4 + 5y^3 + 8y^2 + 5y + 1 + y^3$

$= y^7 + y^4 + 5y^6 + 5y^3 + 8y^5 + 8y^2 + 5y^4 + 5y + 1 + y^3$

$= y^4(y^3 + 1) + 5y^3(y^3 + 1) + 8y^2(y^3 + 1) + 5y(y^3 + 1) + (y^3 + 1)$

$= (y^3 + 1)(y^4 + 5y^3 + 8y^2 + 5y + 1)$

$y^2 \quad 3y \quad 1$

$y^2 \quad 2y \quad 1$

$= (y^3 + 1)(y^2 + 3y + 1)(y^2 + 2y + 1)$

$= (y + 1)(y^2 - y + 1)(y^2 + 3y + 1)(y + 1)^2$

$= (y + 1)^3\,(y^2 - y + 1)(y^2 + 3y + 1)$

$\therefore$ Número de factores primos: 3

Clave C

31. La expresión se puede escribir como:

$E = x^6 + 22x^4 + 121x^2 - (x^4 + 2x^2 + 1)$

Factorizamos:

$E = (x^3 + 11x)^2 - (x^2 + 1)^2$

$E = (x^3 + 11x + x^2 + 1)(x^3 + 11x - x^2 - 1)$

$E = \underbrace{(x^3 + x^2 + 11x + 1)}_{\sum \text{coef.: } 14}\underbrace{(x^3 - x^2 + 11x - 1)}_{\text{Scoef.: } 10}$

Clave A

32. Efectuamos:

$E = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24x(2x^2 - 3x + 1)$

Sea: $2x^2 + 1 = a$

$\Rightarrow E = (a - 9x)^2 + 24x(a - 3x)$

$E = a^2 - 18ax + 81x^2 + 24ax - 72x^2$

$E = a^2 + 6ax + 9x^2$

$E = (a + 3x)^2$

$E = (2x^2 + 1 + 3x)^2 = (2x^2 + 3x + 1)^2$

$2x \quad +1$

$x \quad +1$

$\Rightarrow E = (2x + 1)^2(x + 1)^2$

$\therefore$ Un factor primo es: $2x + 1$

Clave B

33. $E(x; y) = 49x^{4m} + 5x^{2m}y^{4n} + y^{8n}$

$E(x; y) = 49x^{4m} + 5x^{2m}y^{4n} + y^{8n} + 9x^{2m}y^{4n} - 9x^{2m}y^{4n}$

$\Rightarrow E(x; y) = 49x^{4m} + 14x^{2m}y^{4n} + y^{8n} - 9x^{2m}y^{4n}$

$E(x; y) = (7x^{2m} + y^{4n})^2 - (3x^my^{2n})^2$

$E(x; y) = \underbrace{(7x^{2m} + y^{4n} + 3x^my^{2n})}_{\sum \text{coef.} = 11}\underbrace{(7x^{2m} + y^{4n} - 3x^my^{2n})}_{\sum \text{coef.} = 5}$

Clave C

MCD Y MCM - FRACCIONES ALGEBRAICAS

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 37) Unidad 2

1. $E=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)}+\dfrac{(x+9)(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{(x-5)(x+5)}{(x-4)(x-5)}+\dfrac{2x+1}{x-4}$

$E=\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+9}{x+3}-\dfrac{x+5}{x-4}+\dfrac{2x+1}{x-4}$

$E=\dfrac{2x+6}{x+3}+\dfrac{x-4}{x-4}=2+1=3$

Clave B

2. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}-\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{1}{(a-b)}\left[\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{1}{b-c}\right]+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{1.(b-a)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

$=-\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}=0$

Clave E

3. $\dfrac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{3-x-2}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{1-x}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{-(x+1)+x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

Clave C

4. $\dfrac{x^2}{y(x+y)}+\dfrac{y^2}{x(y+x)}-\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\right)$

$=\dfrac{x^3+y^3}{xy(x+y)}-\dfrac{(x^2+y^2)}{xy}$

$=\dfrac{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}{xy\cancel{(x+y)}}-\dfrac{(x^2+y^2)}{xy}$

$=\dfrac{x^2-xy+y^2-x^2-y^2}{xy}=-1$

Clave E

5. MCD(P; F) = $(x-3)(x-2)$

$\Rightarrow$ P(x) = MCD(P; F) . g(x)

$x^4+mx-9x^2+n=(x-3)(x-2)\,.\,g(x)$

Si: $x=2$

$\Rightarrow 2^4+2m-9\,.\,2^2+n=0$

$16+2m-36+n=0$

$2m+n=20$ ...(1)

Si: $x=3$

$\Rightarrow 3^4+3m-9\,.\,3^2+n=0$

$3m+n=0$ ...(2)

De (1) y (2):

$m=-20\ \wedge\ n=60$

$\therefore m+n=40$

Clave B

6. $\underbrace{P(x)}=ax^2+2x-b$

$(x-1)\,.\,q(x)=ax^2+2x-b$

Si: $x=1$

$\Rightarrow 0=a+2-b$

$\Rightarrow -2=a-b$ ...(1)

También:

$\underbrace{R(x)}=ax^2-4x+b$

$(x-1)\,.\,s(x)=ax^2-4x+b$

Si: $x=1$

$0=a-4+b$

$\Rightarrow 4=a+b$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$\Rightarrow a=1\ \wedge\ b=3$

$\therefore M=\dfrac{b}{a}+a^2=\dfrac{3}{1}+1^2=4$

Clave C

7. Sabemos:

A(x) . B(x) = MCD(A(x); B(x)) . MCM(A(x); B(x))

$=(x^2+x-2)(x^3-x^2-4x+4)$

$=(x-1)(x+2)(x^3-x^2-4x+4)$

Factorizando x^3-x^2-4x+4, tenemos:

$A(x)\,.\,B(x)=(x-1)(x+2)[(x-1)(x^2-4)]$

$=(x-1)(x+2)(x-1)(x-2)(x+2)$

$\therefore$ A(x) . B(x) tiene 3 factores primos.

Clave A

8. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{x^3-3x+2}$

$x^2+x+1=x^2(B+C)+x(A+B-2C)+2A-2B+C$

$\Rightarrow\ B+C=1$ ...(I)

$A+B-2C=1$ ...(II)

$2A-2B+C=1$ ...(III)

De (I) y (II): $B+C=A+B-2C\Rightarrow A=3C$

De (I) y (III): $B+C=2A-2B+C$

$\Rightarrow 3B=2A=2(3C)$

$B=2C$

Reemplazamos $A=3C$ y $B=2C$ en (I) y obtenemos:

$A=1;\ B=\dfrac{2}{3}\ \text{y}\ C=\dfrac{1}{3}$

Clave C

9. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+1}{x^2-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

$$=\dfrac{\dfrac{x+1-x+x(x+1)}{x(x+1)}}{\dfrac{x^3-1}{x}}-\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\dfrac{x^2+x+1}{(x^3-1)(x+1)}-\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)}-\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\dfrac{1-x^2}{x^2-1}=\dfrac{-(x^2-1)}{x^2-1}=-1$$

Clave E

10. Dando MCM a cada factor:

$$R=\left(\dfrac{x+3-x(x-1)}{x-1}\right)\left(\dfrac{2x(x+1)-x^2}{x+1}\right):\dfrac{2x-x(x-1)}{x-1}$$

$$R=\left(\dfrac{x+3-x^2+x}{x-1}\right)\left(\dfrac{2x^2+2x-x^2}{x+1}\right)\left(\dfrac{x-1}{2x-x^2+x}\right)$$

$$R=\dfrac{-(x^2-2x-3)}{x-1}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x+1}\cdot\dfrac{x-1}{3x-x^2}$$

$$R=\dfrac{-(x-3)(x+1)}{x-1}\cdot\dfrac{x(x+2)}{x+1}\cdot\dfrac{x-1}{-x(x-3)}=x+2$$

Clave A

11. $E=\left(\dfrac{b+a-x}{ab}\right)(a+b+x):\left(\dfrac{b^2+a^2+2ab-x^2}{a^2b^2}\right)$

$$E=\left(\dfrac{b+a-x}{ab}\right)(a+b+x)\cdot\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-x^2}$$

$$E=\dfrac{(a+b-x)(a+b+x)(a^2b^2)}{ab(a+b+x)(a+b-x)}$$

Simplificando: $E=ab$

Clave C

12. $P=\left[1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a+1}{a}}}\right]\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}$

$$P=\left[1+\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{a+1}}\right]\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}$$

$$P=\left[1+\dfrac{1}{\dfrac{a+1+a}{a+1}}\right]\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}$$

$$P=\left[1+\dfrac{a+1}{2a+1}\right]\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}$$

$$P=\dfrac{2a+1+a+1}{2a+1}\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}$$

$$P=\dfrac{3a+2}{2a+1}\cdot\dfrac{2a+1}{3a+2}\Rightarrow P=1$$

Clave D

13. $M=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{3}{(x+1)(2-x)}$

$$M=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}-\dfrac{3(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}-\dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$M=\dfrac{x+1-3x+6-3x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$M=\dfrac{-5x+10}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\dfrac{-5(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\dfrac{5}{1-x^2}$$

Clave B

14. Simplificando:

$$E=\dfrac{(x-5)(x+2m)}{(x-5)(x-3n)}=\dfrac{x+2m}{x-3n}$$

Pero por dato:

$$\dfrac{x+10}{x+9}=\dfrac{x+2m}{x-3n}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}2m=10\Rightarrow m=5\\-3n=9\Rightarrow n=-3\end{array}$$

$\therefore m+n=2$

Clave A

RACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 39) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

Clave B

2.
A) $\dfrac{(x+1)(x+3)}{7x^2+x+1}$; no es correcta

B) 2; es correcta

C) $\dfrac{m+2n}{2n+3p}$; es correcta

Clave A

Razonamiento y demostración

3. Dato:

$a^2+b^2+c^2=5(ab+bc+ac)$ ...(1)

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=7(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow(a+b+c)^4=49(ab+bc+ac)^2$ ...(2)

Elevando al cuadrado en (1):

$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)=25(ab+bc+ca)^2$

$a^4+b^4+c^4+2[(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)]=25(ab+bc+ca)^2$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=23(ab+bc+ac)^2+4abc(a+b+c)$ ...(3)

Piden:

$$R = \frac{49(a^4+b^4+c^4) - 23(a+b+c)^4}{49abc(a+b+c)} \qquad ...(4)$$

Reemplazando (3) y (2) en (4):

$$R = \frac{49[23(ab+bc+ac)^2 + 4abc(a+b+c)] - 23[49(ab+bc+ac)^2]}{49abc(a+b+c)}$$

$\therefore R = 4$

Clave D

4. $$\frac{2\left((a^2)^2+(b^2)^2\right)}{(a^2+b^2)^2} + \frac{2\left((b^2)^2+(c^2)^2\right)}{(b^2+c^2)} + \frac{2\left((a^2)^2+(c^2)^2\right)}{(a^2+c^2)^2} = 8$$

$$\frac{(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(b^2+c^2)^2+(b^2-c^2)^2}{(b^2+c^2)^2}$$

$$+\frac{(a^2+c^2)^2+(a^2-c^2)^2}{(a^2+c^2)^2} = 8$$

$$1+\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + 1 + \frac{(b^2-c^2)^2}{(b^2+c^2)^2} + 1 + \frac{(a^2-c^2)^2}{(a^2+c^2)^2} = 8$$

Resolviendo:

$3 + x^2 + y^2 + z^2 = 8$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 5$

Clave B

5. Del dato:

$x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) = 2xyz$

$xy(y+x+z) + xz(z+x+y) + yz(z+y+x) = 5xyz$

$\Rightarrow (x+y+z)(xy+xz+yz) = 5xyz \qquad ...(1)$

Sabemos:

$$(x+y+z)^3 = \underbrace{x^3+y^3+z^3}_{4xyz} + 3\underbrace{(x+y+z)(xy+xz+yz)}_{5xyz} - 3xyz$$

$\Rightarrow (x+y+z)^3 = 16xyz \qquad ...(2)$

Piden:

$$E = \frac{(x+y+z)^6 - 16x^2y^2z^2}{(x^3+y^3+z^3)^2}$$

$$E = \frac{((x+y+z)^3)^2 - 16x^2y^2z^2}{(4xyz)^2} \qquad ...(3)$$

Reemplazamos (2) en (3):

$$E = \frac{(16xyz)^2 - 16x^2y^2z^2}{16x^2y^2z^2} = \frac{256-16}{16}$$

$\therefore E = 15$

ClaveE

6. Piden:

$$A = \frac{y(1+x^2)}{(1-xy)(1-xz)} + \frac{z(1+y^2)}{(1-yz)(1-xy)} + \frac{x(1+z^2)}{(1-zx)(1-yz)}$$

Analizamos el primer término:

$$\frac{y(1+x^2)}{(1-xy)(1-xz)} = \frac{y(xy+yz+zx+x^2)}{(yz+zx)(xy+yz)} = \frac{y(y(x+z)+x(z+x))}{z(y+x)y(x+z)}$$

$$= \frac{y(x+z)(y+x)}{z(x+y)y(x+z)} = \frac{1}{z}$$

Procedemos de manera similar para los demás términos:

$$\Rightarrow A = \frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{xy+yz+xz}{xyz} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

$\therefore A = 3$

Clave C

7. Del dato:

$$1-\frac{1}{a+1}+1-\frac{1}{b+1}+1-\frac{1}{c+1} = \frac{a+b+c}{K}$$

$$3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) = \frac{a+b+c}{K}$$

$$3K - K\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) = a+b+c$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) + a+b+c = 3K \qquad ...(1)$$

Piden:

$$H = \frac{a(b+1)+K}{b+1} + \frac{b(c+1)+K}{c+1} + \frac{c(a+1)+K}{a+1}$$

$$\Rightarrow H = a + \frac{K}{b+1} + b + \frac{K}{c+1} + c + \frac{K}{a+1}$$

$$\Rightarrow H = (a+b+c) + K\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$\therefore H = 3K$

Clave C

8. $$F(x) = \frac{x^3+bx^2-abx-a^3}{x^3+3ax^2-4a^2x+b}$$

Si $x = a \Rightarrow F(a) = ?$

Entonces el numerador (N) y denominador (D) tienen como factor a $(x-a)$.

Por Ruffini:

	1	b	$-ab$	$-a^3$
$x = a$		a	a^2+ab	a^3
	1	$(a+b)$	a^2	0

$\Rightarrow q_1(x) = x^2 + (a+b)x + a^2$

	1	$3a$	$-4a^2$	b
$x = a$		a	$4a^2$	0
	1	$4a$	0	0

$\Rightarrow b = 0$

Luego:

$q_2(x) = x^2 + 4ax$

$$F(x) = \frac{(x-a)(x^2+(a+0)x+a^2)}{(x-a)(x^2+4ax)}$$

$$F(x) = \frac{x^2+ax+a^2}{x^2+4ax} \qquad ...(1)$$

Reemplazando x = a en (1):

$\therefore F(a) = \dfrac{a^2 + a^2 + a^2}{a^2 + 4a^2} = \dfrac{3}{5}$

Clave C

9. Dato:

$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{aligned} b + c &= -a \\ a + c &= -b \\ a + b &= -c \end{aligned}$

Sea **S** la expresión que nos piden:

$S = \dfrac{a+b}{b+c} + \dfrac{a+b}{a+c} + \dfrac{b+c}{a+b} + \dfrac{b+c}{a+c} + \dfrac{a+c}{a+b} + \dfrac{a+c}{b+c}$

$S = \dfrac{a+b+a+c}{b+c} + \dfrac{a+b+b+c}{a+c} + \dfrac{b+c+a+c}{a+b}$

$S = \dfrac{a+b+c+a}{b+c} + \dfrac{a+b+c+b}{a+c} + \dfrac{a+b+c+c}{a+b}$

$S = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}$

Reemplazando:

$S = \dfrac{a}{-a} + \dfrac{b}{-b} + \dfrac{c}{-c}$

$\therefore S = -1 - 1 - 1 = -3$

Clave E

10. $P(x; y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$

$= x(x^2 - y^2) + y(x^2 - y^2)$

$= (x^2 - y^2)(x + y)$

$\Rightarrow P(x; y) = (x - y)(x + y)^2$

$A(x; y) = x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$

$= x(x^2 - y^2) - y(x^2 - y^2)$

$= (x^2 - y^2)(x - y)$

$\Rightarrow A(x; y) = (x + y)(x - y)^2$

$B(x; y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

$= (x^2 - y^2)^2$

$\Rightarrow B(x; y) = (x + y)^2(x - y)^2$

$\Rightarrow MCD(P; A; B) = (x - y)(x + y)$

$\therefore MCD(P; A; B) = x^2 - y^2$

Clave C

Resolución de problemas

11. Del enunciado, se cumple:

$\dfrac{P(x)}{(x-1)(x+3)}$ y $\dfrac{Q(x)}{\underbrace{(x-1)(x+3)}_{x^2 + 2x - 3}}$; tienen residuo R(x) = 0

Por Horner: (para P(x))

1	1	4	a	b
−2		−2	3	
3			−4	6
	1	2	0	0

$\Rightarrow P(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

Por Horner: (para Q(x))

1	1	0	c	d
−2		−2	3	
3			4	−6
	1	−2	0	0

Luego:

$Q(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$

$\Rightarrow A = MCM(P; Q) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)(x - 2)$

$\therefore \Sigma$coeficientes de:

$A = (1 - 1)(1 + 3)(1 + 2)(1 - 2) = 0$

Clave E

12. $\dfrac{8x^2 + 29x + 12}{x(x+2)^2} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{7}{(x+2)^2}$

Nos piden: 3(5)(7) = 105

Clave C

Nivel 2 (página 40) Unidad 2

Comunicación matemática

13.

I. MCD = x − 3
MCM = $(x - 3)(x + 2)(x + 3)(x + 7)^2$

II. Correcta.

III. MCD = (x + 7)(x − 5)
MCM = $(x + 7)(x - 5)(x - 3)(x + 2)(x^2 + x - 3)(x^3 + x + 1)$

IV. Incorrecta

Clave A

14.

I. IMPROPIA
II. DIVISOR
III. PROPIA
IV. VALOR
V. CERO
VI. MCM
VII. SI
VIII. A

15.

1. NO 2. NO 3. SÍ

Razonamiento y demostración

16. Del enunciado, tenemos:

$M = \dfrac{1}{a.1 + bc} + \dfrac{1}{b.1 + ac} + \dfrac{1}{c.1 + ab}$

$M = \dfrac{1}{a(a+b+c) + bc} + \dfrac{1}{b(a+b+c) + ac} + \dfrac{1}{c(a+b+c) + ab}$

$M = \dfrac{1}{\underbrace{a^2 + ab}_{a(a+b)} + \underbrace{ac + bc}_{c(a+b)}} + \dfrac{1}{ab + b^2 + bc + ac} + \dfrac{1}{ca + cb + c^2 + ab}$

$M = \dfrac{1}{(a+c)(a+b)} + \dfrac{1}{(b+c)(a+b)} + \dfrac{1}{(a+c)(b+c)}$

$$M = \frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$M = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$M = \frac{2}{(a+b)(a+c)(b+c)} \qquad ...(1)$$

Sabemos:

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

$1 = 4 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = -1 \qquad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$\therefore M = \frac{2}{-1} = -2$

Clave B

17. $A(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

$2x^2 \quad -x \quad 3$

$x^2 \quad 0 \quad -3$

Se tiene: $-3x^2$

Se debe tener: $-3x^2$

Falta: $0x^2$

$\Rightarrow A(x) = (2x^2 - x + 3)(x^2 - 3)$

$B(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$

	10	−9	17	−6
$\frac{2}{5}$	↓	4	−2	6
	10	−5	15	0

$B(x) = \left(x - \frac{2}{5}\right)(10x^2 - 5x + 15)$

$B(x) = (5x-2)(2x^2 - x + 3)$

$\therefore MCD(A(x); B(x)) = 2x^2 - x + 3$

Clave C

18. Tenemos:

$$\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = 4$$

Sea: $y - z = a;\ z - x = b \ \wedge \ x - y = c$

$\Rightarrow a + b + c = 0$

Además: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 4$

Luego:

$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$S^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$$

De (1):

$$S^2 = 4 + 2\left(\overbrace{\frac{a+b+c}{abc}}^{0}\right) = 4$$

$\therefore S = 2$

Clave C

19. Dato:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

$\Rightarrow ab + bc + ac = 0 \qquad ...(\alpha)$

Por productos notables:

$(ab)^3 + (bc)^3 + (ac)^3 = 3(ab)(bc)(ac)$

$a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3 = 3a^2b^2c^2 \qquad ...(1)$

Piden:

$$E = \sqrt[3]{\frac{3a^2b^2c^2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3}} \qquad ...(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$E = \sqrt[3]{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \qquad ...(3)$

Sabemos:

- $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc$
- $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Reemplazando (α) en las fórmulas anteriores se tiene:

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3-3abc$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \quad (+)$

$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \qquad ...(4)$

Reemplazando (4) en (3):

$\therefore E = \sqrt[3]{(a+b+c)^3} = a+b+c$

Clave C

20. Factorizamos:

$M(x) = x^3 + 7x^2 - 17x + 9$

	1	7	−17	9
x = 1	↓	1	8	−9
	1	8	−9	0

$M(x) = (x-1)(x^2+8x-9)$

$x \quad 9$

$x \quad -1$

$M(x) = (x-1)^2(x+9)$

Factorizamos:

$N(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

	1	2	−7	4
x = 1	↓	1	3	−4
	1	3	−4	0

$N(x) = (x-1)(x^2+3x-4)$

$x \quad 4$

$x \quad -1$

$N(x) = (x-1)^2(x+4)$

Luego:

$$E = \frac{M(x)}{N(x)} = \frac{(x-1)^2(x+9)}{(x-1)^2(x+4)} = \frac{x+9}{x+4}$$

Para x = 1:

$\therefore E = \frac{1+9}{1+4} = 2$

Clave E

21. Sabemos que:

(*) $xa = a^2 - bc$

Multiplicamos por a:

$xa^2 = a^3 - abc$

(*) $yb = b^2 - ca$

Multiplicamos por b:

$yb^2 = b^3 - abc$

(*) $zc = c^2 - ab$

Multiplicamos por c:

$zc^2 = c^3 - abc$

Nos piden: $= \frac{a^2x + b^2y + c^2z}{ax + bx + cz}$

Reemplazando:

$$F = \frac{a^3 - abc + b^3 - abc + c^3 - abc}{a^2 - bc + b^2 - ca + c^2 - ab}$$

$$F = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}$$

Sabemos por Gauss que:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac)$

Luego:

$$F = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}$$

$\therefore F = a + b + c$

Clave B

22. $$\frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x(x+5)+1} = \frac{2(2x^2+11x)+13}{(x+5)[x(x+5)+1]}$$

$$\frac{A[x(x+5)+1] + Bx(x+5) + C(x+5)}{(x+5)[x(x+5)+1]} = \frac{4x^2+22x+13}{(x+5)[x(x+5)+1]}$$

$A[x(x+5)+1] + Bx(x+5) + C(x+5) = 4x^2 + 22x + 13$

Sea:

$x = -5 \Rightarrow A = 4(-5)^2 + 22(-5) + 13$

$A = 3$

$x = 0 \Rightarrow A + 5C = 13$

$3 + 5C = 13 \Rightarrow C = 2$

$x = 1 \Rightarrow 7A + 6B + 6C = 4 + 22 + 13$

$7(3) + 6B + 6(2) = 39$

$21 + 6B + 12 = 39$

$6B = 6 \Rightarrow B = 1$

Nos piden: $(A+B)^C = (3+1)^2 = 16$

Clave E

Resolución de problemas

23. $S = \dfrac{x^3 - a^3}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \dfrac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

$S = \dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})(x^2 + ax + a^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

$S = (\sqrt{x} + \sqrt{a})(x^2 + ax + a^2)$

Si: $x = a$

$S = (\sqrt{a} + \sqrt{a})(a^2 + a^2 + a^2)$

$S = (2\sqrt{a})(3a^2) = 6a^2\sqrt{a}$

Clave B

24. No olvidar que la fracción tiene que ser propia, luego:

$$x + 1 - \frac{3x^2 + 20x - 7}{x^3 - 8x^2 + 5x + 14}$$

El denominador presenta tres factores de primer grado distintos, entonces:

$$\frac{3x^2 + 20x - 7}{(x+1)(x-7)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x-2}$$

$3x^2 + 20x - 7 = A(x-7)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-7)$

$x = 2$: $12 + 40 - 7 = C(3)(-5)$

$\Rightarrow C = -3$

$x = 7$: $3(49) + 140 - 7 = B(8)(5)$

$\Rightarrow B = 7$

$x = -1$: $3 - 20 - 7 = A(-8)(-3)$

$\Rightarrow A = -1$

$$x + 1 - \frac{3x^2 + 20x - 7}{x^3 - 8x^2 + 5x + 14} = x + 1 - \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{7}{x-7} + \frac{-3}{x-2}\right)$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{7}{x-7} + \frac{3}{x-2}$$

Nos piden

$1 + 2(x+1) = 1 + 2x + 2 = 2x + 3$

$-7 + 2(x-7) = -7 + 2x - 14 = 2x - 21$

$3 + 2(x-2) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$

Clave B

Nivel 3 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

25.

I. MCD = $(x+1)(x+3)$

$\Rightarrow$ I: correcto

II. MCM = $(x+1)(x+3)(x+2)(x+4)(2x-1)(x^2+2) \,.\, (x^2 - 3x + 2)$

$\Rightarrow$ II: correcto

III. TI MCM = −96

$\Rightarrow$ III: correcto

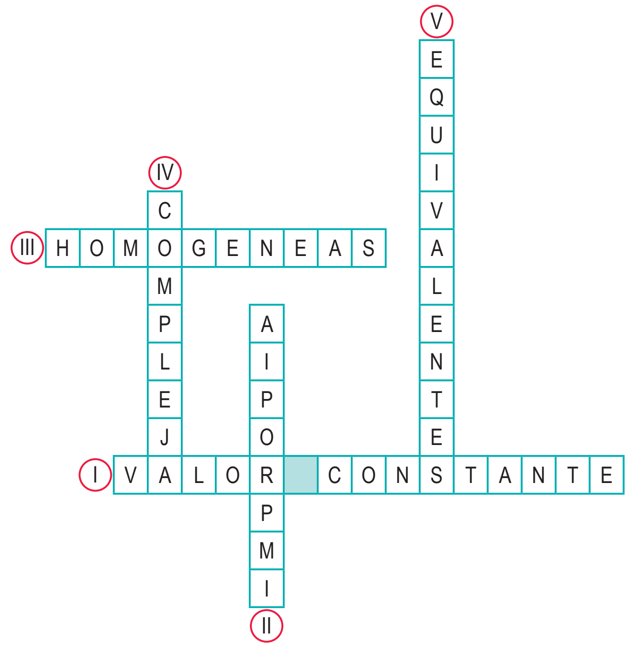
IV. $\sum$coef. MCD = 8

$\Rightarrow$ IV: correcto

V. MCD . MCM = $(x+1)^2(x+3)^2(2x-1)(x^2 - 3x + 2)(x+2)(x+4)$

$\Rightarrow$ V: incorrecto

26.



27.

- Cada polinomio puede ser expresado considerando el MCD como:

  $A(x) = \underbrace{(x+7)(x+1)}_{2.° \text{ grado}}$ (Pol. 2.° grado) $= x^4 + 15x^3 + 64x^2 + mx + n$

  Para x = 7: $0 = (-7)^4 + 15(-7)^3 + 64(-7)^2 + m(-7) + n$

  $\Rightarrow (-7)m + n = -392$ ...(1)

  Para x = −1: $0 = (-1)^4 + 15(-1)^3 + 64(-1)^2 + m(-1) + n$

  $\Rightarrow (-1)m + n = -50$ ...(2)

  De (1) y (2): m = 57 y n = 7

  Asimismo:

  $B(x) = \underbrace{(x+7)(x+1)}_{2.° \text{ grado}}$(Pol. 3er grado) $= x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 9x^2 + px + q$

  Para x = −7: $0 = (-7)^5 + 8(-7)^4 + 5(-7)^3 - 9(-7)^2 + p(-7) + q$

  $\Rightarrow (-7)p + q = -245$ ...(3)

  Para x = −1: $0 = (-1)^5 + 8(-1)^4 + 5(-1)^3 - 9(-1)^2 + p(-1) + q$

  $\Rightarrow (-1)p + q = 7$ ...(4)

  De (3) y (4): p = 42 y q = 49

- Con los valores (m; n; p y q) determinados; factorizamos los polinomios:

  $A(x) = x^4 + 15x^3 + 64x^2 + 57x + 7$

	1	15	64	57	7
−7		−7	−56	−56	−7
	1	8	8	1	0
−1		−1	−7	−1	
	1	7	1	0	

$A(x) = (x+7)(x+1)(1x^2 + 7x + 1)$

$B(x) = x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 9x^2 + \boxed{42}\,x + \boxed{49}$

	1	8	5	−9	42	49
−7		−7	−7	14	−35	−49
	1	1	−2	5	7	0
−1		−1	0	2	−7	
	1	0	−2	7	0	

$B(x) = (x + 7)(x + 1)(\boxed{1}\,x^3 + \boxed{-2}\,x + \boxed{7})$

- El MCM de A(x) y B(x) estará dado por:
  $MCM(A; B) = (x + 7)(x + 1)(\boxed{1}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{1})(\boxed{1}\,x^3 + \boxed{-2}\,x + \boxed{7})$
- Nos piden la suma de los factores primos del MCM $\Sigma FP(MCM)$:
  $\Sigma FP(MCM) = (x + 7) + (x + 1) + (\boxed{1}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{1}) + (\boxed{1}\,x^3 + \boxed{-2}\,x + \boxed{7})$
- Reduciendo términos semejantes:
  $\Sigma FP(MCM) = \boxed{1}\,x^3 + \boxed{1}\,x^2 + [1 + 1 + \boxed{7} + \boxed{-2}]x + [7 + 1 + \boxed{1} + \boxed{7}]$

  $\therefore\ \Sigma FP(MCM) = \boxed{1}\,x^3 + \boxed{1}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{16}$

Razonamiento y demostración

28. Dato:

$(y + z)^{-1} + (x + z)^{-1} + (x + y)^{-1} = 0$

Sea: $y + z = a;\ x + z = b;\ x + y = c$

Reemplazando:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

$\Rightarrow bc + ac + ab = 0$

$$\left.\begin{array}{l} ab + ac = -bc \\ ab + bc = -ac \\ ac + bc = -ab \end{array}\right\} ...(*)$$

Nos piden:

$$E = \left(\frac{2x + y + z}{y + z}\right)\left(\frac{x + 2y + z}{x + z}\right)\left(\frac{x + y + 2z}{x + y}\right)$$

Reemplazando:

$$E = \left(\frac{b + c}{a}\right)\left(\frac{a + c}{b}\right)\left(\frac{a + b}{c}\right)$$

Dando forma:

$$E = \left(\frac{ab + ac}{a^2}\right)\left(\frac{ab + bc}{b^2}\right)\left(\frac{ac + bc}{c^2}\right)$$

Reemplazando (*) en E:

$$\Rightarrow E = \left(-\frac{bc}{a^2}\right)\left(-\frac{ac}{b^2}\right)\left(-\frac{ab}{c^2}\right) = -1$$

Clave D

29. Dato:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x} = xyz$$

Dando forma:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + y - x + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + z - y + \frac{z^2 + x^2}{z + x} + x - z = xyz$$

$$\frac{x^2 + y^2 + y^2 - x^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2 + z^2 - y^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2 + x^2 - z^2}{z + x} = xyz$$

$$\frac{2y^2}{x + y} + \frac{2z^2}{y + z} + \frac{zx^2}{z + x} = xyz$$

Nos piden:

$$K = \frac{y}{xz(x + y)} + \frac{z}{xy(y + z)} + \frac{x}{yz(z + x)}$$

$$K = \frac{y^2}{xyz(x + y)} + \frac{z^2}{xyz(y + z)} + \frac{x^2}{xyz(z + x)}$$

Multiplicando por 2:

$$2K = \frac{1}{xyz}\left[\frac{2y^2}{x + y} + \frac{2z^2}{y + z} + \frac{2x^2}{z + x}\right]$$

$$2K = \frac{xyz}{xyz} \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Clave A

30. Datos:

$a^3 + b^3 + c^3 = 4$

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 - b - c \\ b = 1 - a - c \\ c = 1 - a - b \end{array}$$

Nos piden:

$$M = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + \frac{1}{c + ab}$$

Reemplazando:

$$M = \frac{1}{1 - b - c + bc} + \frac{1}{1 - a - c + ac} + \frac{1}{1 - a - b + ab}$$

$$M = \frac{1}{(1 - b) - c(1 - b)} + \frac{1}{(1 - a) - c(1 - a)} + \frac{1}{(1 - a) - b(1 - a)}$$

$$M = \frac{1}{(1 - b)(1 - c)} + \frac{1}{(1 - a)(1 - c)} + \frac{1}{(1 - a)(1 - b)}$$

Homogenizando:

$$M = \frac{1 - a + 1 - b + 1 - c}{(1 - b)(1 - a)(1 - c)} = \frac{3 - (a + b + c)}{(1 - b)(1 - a)(1 - c)}$$

$$M = \frac{2}{1 - (a + b + c) + (ab + bc + ac) - abc}$$

$$M = \frac{2}{ab + bc + ac - abc} \qquad ...(\alpha)$$

Sabemos que:

$$\underbrace{(a + b + c)^3}_{1} = \underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{4} + 3\underbrace{(a + b + c)}_{1}(ab + bc + ac) - 3abc$$

$-3 = 3(ab + bc + ac) - 3abc$

$-1 = ab + bc + ac - abc$

Reemplazando en (α):

$$\therefore M = \frac{2}{-1} = -2$$

Clave B

31. Dato:

$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=0 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

$\Rightarrow ab+bc+ac=0$

Se cumple:

$(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3=3(abc)^2$

Recuerda:

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ ...(I)

Sea: $x=a^3$; $y=b^3$; $z=c^3$

Reemplazando en (I):

$$a^9+b^9+c^9-3a^3b^3c^3=(a^3+b^3+c^3)[a^6+b^6+c^6-\underbrace{(a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3)}_{3(abc)^2}]$$

$a^9+b^9+c^9-3a^3b^3c^3=(a^3+b^3+c^3)[a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2]$ ...(II)

Nos piden:

$S=\sqrt[3]{\frac{a^9+b^9+c^9-3a^3b^3c^3}{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}-3abc}$ ...(III)

Reemplazando (II) en (III):

$$S=\sqrt[3]{\frac{(a^3+b^3+c^3)[a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2]}{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}-3abc}$$

$S=\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-3abc}$

$S=\sqrt[3]{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}$

$S=\sqrt[3]{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$

$S=\sqrt[3]{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)}$

$S=\sqrt[3]{(a+b+c)(a+b+c)^2}$

$\therefore S=\sqrt[3]{(a+b+c)^3}=a+b+c$

Clave C

32. Dato:

$ab+bc+ac=0$

Se cumple:

$(ab)^3+(bc)^3+(ac)^3=3(abc)^2$

$(ab)^3+(bc)^3=3(abc)^2-(ac)^3$ ...(α)

Nos piden:

$k=\frac{(ab)^3+(bc)^3-2(ac)^3}{3abc(a+b+c)}$ ...(β)

Reemplazando α en β:

$K=\frac{3(abc)^2-(ac)^3-2(ac)^3}{3abc(a+b+c)}$

$K=\frac{3(abc)^2-3(ac)^3}{3abc(a+b+c)}$

$K=\frac{3(ac)^2[b^2-ac]}{3abc(a+b+c)}$

$K=\frac{ac(b^2-ac)}{b(a+b+c)}$ ...(II)

Sabemos que:

$ab+bc+ac=0$

$b(a+c)=-ac$

Sumamos b^2 en ambos miembros:

$b^2+b(a+c)=b^2-ac$

$b(b+a+c)=b^2-ac$

Reemplazando en II: $K=\frac{acb(a+b+c)}{b(a+b+c)}=ac$

Clave A

33. Dato:

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow ab+bc+ac=0$

Sabemos que:

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3-3abc$ ...(α)

De: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Elevamos al cuadrado:

$(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$ ...(I)

Luego:

Si: $ab+bc+ac=0$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=-2abc(a+b+c)$ ...(II)

(II) en (I):

$(a+b+c)^4=a^4+b^4+c^4-4abc(a+b+c)$ ...(III)

Nos piden: $M=\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc}$

Reemplazando (α) y (III) en M:

$M=\frac{(a+b+c)^4+4abc(a+b+c)}{(a+b+c)^3+3abc+abc}$

$M=(a+b+c)\left[\frac{(a+b+c)^3+4abc}{(a+b+c)^3+4abc}\right]$

$\therefore M=a+b+c$

Clave A

34. $P(x)=MCD(P;Q)\,.\,h(x)$

$Q(x)=MCD(P;Q)\,.\,g(x)$

$\Rightarrow P(x)-Q(x)=MCD(P;Q)(h(x)-g(x))$

$\Rightarrow \frac{P(x)-Q(x)}{MCD(P;Q)}$ tiene $R(x)=0$

$\frac{x^2(a-c)+x(a+b-c-d)+(b-d)}{MCD(P;Q)}$

↳ cuadrado perfecto

Luego, el numerador también tiene que ser un cuadrado perfecto.
Analizando el discriminante:

$\Rightarrow (a+b-(c+d))^2-4(a-c)(b-d)=0$

$[(a-c)+(b-d)]^2-4(a-c)(b-d)=0$

$$\underbrace{(a-c)^2-2(a-c)(b-d)+(b-d)^2}_{[(a-c)-(b-d)]^2}=0$$

$\Rightarrow (a-c)-(b-d)=0$

$\therefore a+d=c+b$

Clave C

35. $\dfrac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}$

$$\frac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)}=\frac{a(x+3)(x-2)+bx(x-2)+cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

Luego:

$5x^2+19x-18=a(x+3)(x-2)+bx(x-2)+cx(x+3)$

Sea:

$x=2 \Rightarrow 20+38-18=10c$

$\Rightarrow c=4$

Sea:

$x=0 \Rightarrow -18=-6a$

$\Rightarrow a=3$

Sea:

$x=-3 \Rightarrow 45-57-18=15b$

$\Rightarrow b=-2$

Clave B

Resolución de problemas

36. $\dfrac{a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2}{a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2}=11$

Desarrollando:

$$\frac{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+6abc}{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2-6abc}=11$$

Factorizando:

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+6abc}{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-6abc}=11$$

Reemplazando la siguiente relación en la ecuación anterior:

$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=Mabc$

$\Rightarrow \dfrac{Mabc+6abc}{Mabc-6abc}=11$

$M+6=11M-66$

$72=10M$

$\therefore M=7,2$

Clave B

37. Sea:

$N(x)=mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)$

$M(x)=mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)$

Factorizando convenientemente:

$N(x)=mx^2(x-1)-7x(x-1)+(m+1)(x-1)$

$\Rightarrow N(x)=(x-1)(mx^2-7x+m+1)$

$M(x)=mx^2(x-1)-9x(x-1)+(m+7)(x-1)$

$\Rightarrow M(x)=(x-1)(mx^2-9x+m+7)$

$\Rightarrow \dfrac{N(x)}{M(x)}=\dfrac{mx^2-7x+m+1}{mx^2-9x+m+7}$

Si $D=MCD(N;M)$

Sea $D=(x-a)$

$\Rightarrow ma^2-7a+m+1=0$ ...(1)

$ma^2-9a+m+7=0$ ...(2)

Restando (2) de (1): $2a-6=0 \Rightarrow a=3$

Reemplazando $a=3$ en (1):

$m\,.\,3^2-7(3)+m+1=0$

$10m-20=0 \Rightarrow m=2$

Luego:

$\dfrac{N(x)}{M(x)}=\dfrac{2x^2-7x+3}{2x^2-9x+9}=\dfrac{(2x-1)(x-3)}{(2x-3)(x-3)}$

$\Rightarrow \dfrac{N(x)}{M(x)}=\dfrac{2x-1}{2x-3}$

Por lo tanto: El denominador es: $2x-3$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 46) Unidad 2

Comunicación Matemática

1.

I. N.° términos = 17 + 1 = 18 (V)

II. $(x+y)^{10} = +; +; +; \ldots +$ (F)

III. $(a-b)^7 = +; -; +; -$ (V)

↓ 4.° término

IV. $t_{10} = t_{(9+1)} = C_9^{20} x^{11} y^9 = 167\,960 x^{11} y^9$ (V)

Clave C

2. Alternativa C coincide exactamente.

Clave C

Razonamiento y demostración

3. $\dfrac{n! + (n+1)! + (n+2)!}{(n+2)! - (n+1)! - n!} = k!$

Degradando:

$$\frac{n! + (n+1)n! + (n+2)(n+1)n!}{(n+2)(n+1)n! - (n+1)n! - n!} = k!$$

Reduciendo:

$$\frac{n!(n+2)^2}{n!(n+2)n} = k!$$

$$\frac{n+2}{n} = k!$$

$$k! = 1 + \frac{2}{n} \Rightarrow \begin{matrix} n = 2 \\ k = 2 \end{matrix}$$

Nos piden:

$n^k = 2^2 = 4$

Clave D

4. De la expresión:

$[(\sqrt{x} - 1)^9(\sqrt{x} + 1)^9(x^2 + x + 1)^9]^4$

(Diferencia de cuadrados)

Entonces:

$[(x-1)^9(x^2+x+1)^9]^4$

$= [(x-1)(x^2+x+1)]^{36}$

$= (x^3-1)^{36}$

Número de términos es: 36 + 1 = 37

Piden: $t_c = t_{\frac{36}{2}+1} = t_{19} = t_{18+1}$

$t_{18+1} = C_{18}^{36}(x^3)^{36-18}(-1)^{18} = C_{18}^{36} x^{54}$

Clave D

5. $C_4^{a+3} = 7C_4^{a+1}$

Por definición:

$$\frac{\underline{|a+3}}{\underline{|4}\,\underline{|(a-1)}} = \frac{7\underline{|(a+1)}}{\underline{|4}\,\underline{|(a-3)}}$$

$$\frac{(a+3)(a+2)(a+1)a\underline{|(a-1)}}{\underline{|a-1}}$$

$$= \frac{7(a+1)(a)(a-1)(a-2)\underline{|(a-3)}}{\underline{|a-3}}$$

Simplificando:

$(a+3)(a+2) = 7(a-1)(a-2)$

Multiplicando:

$3a^2 - 13a + 4 = 0$

$3a \quad -1$

$a \quad -4$

$a = \dfrac{1}{3} \vee a = 4$ ✓

También:

$a! = n\,\underline{|a-2}$

Reemplazando:

$4! = n\,\underline{|2}$

$4 . 3\,\underline{|2} = n\,\underline{|2} \Rightarrow n = 12$

Nos piden:

$n + a = 12 + 4 = 16$

Clave E

6. $2C_4^x = 2C_3^x - C_2^x$

Por definición:

$$\frac{2\,\underline{|x}}{\underline{|4}\,\underline{|x-4}} = \frac{2\,\underline{|x}}{\underline{|3}\,\underline{|x-3}} - \frac{\underline{|x}}{\underline{|2}\,\underline{|x-2}}$$

$$\frac{1}{12\,\underline{|x-4}} = \frac{1}{3(x-3)\underline{|(x-4)}} - \frac{1}{2(x-2)(x-3)\underline{|(x-4)}}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3(x-3)} - \frac{1}{2(x-2)(x-3)}$$

Reduciendo se tiene:

$x^2 - 9x + 20 = 0$

$x \quad -4$

$x \quad -5$

$x = 4 \vee x = 5$

Clave B

7. $(3\sqrt{3} + \sqrt{2})^{12}$

Sea:

$t_{k+1} = C_k^{12}(3\sqrt{3})^{12-k}(\sqrt{2})^k$

Para que $t_{k+1} \in \mathbb{N}$ se debe cumplir:

$k = \overset{o}{2}$ ...(I)

Además:

$12 - k \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$ ...(II)

De (I) ∧ (II):

k = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12

∴ Los términos que pertenecen a los naturales son 7.

Clave D

8. $\left(ax + \dfrac{1}{x}\right)^8$

Por dato:

$t_7 = t_{6+1} = C_6^8\,(ax)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^6 = 252x^{-4}$

$a^2\,C_6^8\,x^{-4} = 252x^{-4}$

$\Rightarrow a^2\,C_2^8 = 252 \wedge C_2^8 = 28$

$a^2\,(28) = 252 \Rightarrow a^2 = 9 \wedge a > 0$

$\therefore a = 3$

Clave C

Resolución de problemas

9. Sea: $(ax^{-b}\sqrt{y} - b\,{}^{a}\!\sqrt{xy})^{2a}$

Si x = y = 1 entonces:

$(a-b)^{2a} = 4096$

$\Rightarrow (a-b)^a = 64$ ...(1)

$t_{k+1} = C_k^{2a}\left(axy^{\frac{1}{-b}}\right)^{2a-k}\left(-bx^{\frac{1}{a}}y^{\frac{1}{a}}\right)^k$

$t_{k+1} = C_k^{2a}a^{2a-k}b^k x^{2a-k+\frac{k}{a}}\,y^{\frac{2a-k}{-b}+\frac{k}{a}} . (-1)^k$

Del enunciado:

$2a - k + \dfrac{k}{a} = \dfrac{2a-k}{-b} + \dfrac{k}{a} = 4$ ...(2)

Resolviendo:

$b = -1$

Reemplazando $b = -1$ en (1):

$(a+1)^a = 64 = 4^3 = (3+1)^3$

$\Rightarrow a = 3$

Reemplazando $a = 3$ en (2):

$6 - k + \dfrac{k}{3} = 4$

$k = 3 \Rightarrow k + 1 = 4$

Clave B

10. De la expresión:

$t_{a+3} = C_{a+2}^{n}(ax^a)^{n-(a+2)}(bx^b)^{a+2}$

$t_{b-1} = C_{b-2}^{n}(ax^a)^{n-(b-2)}(bx^b)^{b-2}$

Del enunciado:

$C_{a+2}^{n} = C_{b-2}^{n}$

$\Rightarrow a + b = n$ ...(1)

Además:

$(a+b)^n = 27$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$n^n = 27 \Rightarrow n = 3$

$\Rightarrow \Sigma\text{exponentes} = (a+b)\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \Sigma\text{exponentes} = \dfrac{3.3.4}{2} = 18$

Clave B

Nivel 2 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

12.

I. Verdadera, ya que: $\underline{|2m} = 2^m\,\underline{|m}$

II. Falsa, similar al caso anterior.

III. Falsa, si G = 7, no verifica la igualdad.

IV. Falsa, 3!!!, no está definida en las matemáticas, pensar que es factorial de factorial y así sucesivamente, no tiene sentido en el álgebra.

V. Verdadera, en este caso lo que se aprecia en el 1er miembro es la separación de los factoriales por los paréntesis, esto sí le da sentido para lograr desarrollarlo (empezar de adentro hacia afuera), luego del 2.° miembro considerando lo escrito en IV concluimos que esta proposición es verdadera.

Razonamiento y demostración

13. $n.n! + (n+1)(n+1)! + ... + m\,.\,m! = 15! - 7!$

Sabemos:
$a\,.\,a! = (a+1)! - a!$

Luego:
$(n+1)! - n! + (n+2)! - (n+1)! + (n+3)!$
$- (n+2)! + (n+4)! - (n+3)! + ... + (m+1)! - m!$
$= 15! - 7!$
$(m+1)! - n! = 15! - 7!$

Donde:
$n = 7$
$m + 1 = 15 \Rightarrow m = 14$

Nos piden: $mn = 98$

Clave E

14. $[(a+b)^n]^2(a-b)^{2n}[a^4 + a^2b^2 + b^4]^{2n}$

$= (a^2 - b^2)^{2n}(a^4 + a^2b^2 + b^4)^{2n}$

$= [a^6 - b^6]^{2n}$

Sabemos que:
n.° términos = grado + 1
$17 = 2n + 1 \Rightarrow n = 8$

Nos piden: $t_{central} = t_{\left(\frac{17+1}{2}\right)} = t_9 = ?$

$t_{k'} = t_{k+1} = C_k^{2n}(a^6)^{2n-k}(-b^6)^k$

Reemplazando datos:

$t_9 = t_{8+1} = C_8^{16}(a^6)^{16-8}(-b^6)^8$

$t_{central} = t_9 = C_8^{16}(ab)^{48}$

Clave C

15. $S = C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + ... + nC_n^n$

$S = \frac{n}{1}C_0^{n-1} + 2\left(\frac{n}{2}\right)C_1^{n-1} + 3\left(\frac{n}{3}\right)C_2^{n-1}$
$+ ... + n.\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}$

$S = n(C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + ... + C_{n-1}^{n-1})$

$\Rightarrow S = n(1+1)^{n-1} = n(2)^{n-1}$

$\therefore S = n\,.\,2^{n-1}$

Clave E

16. $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} = \frac{x(x^2+6)}{6}$

$\binom{x+1}{1} + \binom{x+1}{3} = \frac{x^3+6x}{6}$

$x + 1 + \frac{\underline{|x+1}}{\underline{|3}\ \underline{|x-2}} = \frac{x^3+6x}{6}$

$x + 1 + \frac{(x+1)x\,(x-1)\underline{|(x-2)}}{1\times2\times3\underline{|(x-2)}} = \frac{x^3+6x}{6}$

$x + 1 + \frac{x(x^2-1)}{6} = \frac{x^3+6x}{6}$

Reduciendo:
$5x + 6 = 6x \Rightarrow x = 6$
C.S. = {6}

Clave A

17. $\left(2x^4 + \frac{1}{2x^4}\right)^{10}$

Sea t_{k+1} el término independiente.

Luego: $t_{k+1} = C_k^{10}(2x^4)^{10-k}\left(\frac{1}{2x^4}\right)^k$

Reduciendo: $t_{k+1} = 2^{10-2k}\,C_k^{10}\,.\,x^{40-8k}$

Por dato: $40 - 8k = 0 \Rightarrow k = 5$

Luego: $t_{k+1} = t_6 = 2^0C_5^{10} = C_5^{10}$

Por definición: $t_6 = \frac{10!}{5!5!} = 252$

Clave A

18. Sean: t_k; t_{k+1}; t_{k+2} los términos consecutivos.

Por dato:

$\frac{C_{k-1}^n}{1} = \frac{C_k^n}{3} = \frac{C_{k+1}^n}{5}$

I (primera y segunda) — II (segunda y tercera)

De (I):

$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{3k!(n-k)!}$

$3k!(n-k)! = (k-1)!\,(n-k+1)!$
$3k(k-1)!(n-k)! = (k-1)!(n-k+1)(n-k)!$
$3k = n - k + 1$
$4k = n + 1$ ...(α)

De (II):

$\frac{n!}{3k!(n-k)!} = \frac{n!}{5(k+1)!(n-k-1)!}$

$5(k+1)k!\,(n-k-1)! = 3k!(n-k)(n-k-1)!$
$5k + 5 = 3n - 3k$
$8k = 3n - 5$ ...(β)

De (α) y (β): $n = 7$

Clave B

Resolución de problemas

19. Elegir tesorero y secretario:

$C_1^{40}xC_1^{20} = 800$

Elegir un presidente y un vicepresidente entre los 58 restantes:
$2C_2^{58} = 3306$ ...(1)
↳ En (1) el factor dos quiere que los 2 seleccionados puedan ocupar cualquiera de los 2 cargos.

$\therefore 800\,.\,3306 = 2\,644\,800$

Clave A

20. $C_1^5xC_3^7 + C_2^5xC_2^7 + C_3^5xC_1^7 + C_4^5xC_0^7$

$\therefore 175 + 210 + 70 + 5 = 460$

Clave E

Nivel 3 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

21. Según teoría.

Clave D.

22.
I. Triángulo de Pascal
II. Binomio de Newton
III. Número combinatorio
IV. Factorial
V. Término general

Razonamiento y demostración

23.

2	N
–2/9	E
84	W
6	t
3	O
2	N

24. $R = C_3^n + 4C_3^{n+1} + C_3^{n+2}$

$R = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{4(n+1)!}{3!(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!}$

$R = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} +$
$4\,.\,\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{6(n-2)!}$
$+ \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{6\,.(n-1)!}$

$R = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{4(n+1)n(n-1)}{6}$
$+ \frac{(n+2)(n+1)(n)}{6}$

$R = \frac{n}{6}[(n-1)(n-2) + 4(n+1)(n-1)$
$+ (n+2)(n+1)]$

$R = \frac{n}{6}[n^2 - 3n + 2 + 4n^2 - 4 + n^2 + 3n + 2]$

$R = \frac{n}{6}(6n^2) = n^3$

Clave E

25. Sabemos:

Si en $(x+y)^n$ n es par

$\Rightarrow t_c = t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ / t_c: término central

Del enunciado:

$t_{13} = t_{\left(\frac{p-19}{2}+1\right)} \Rightarrow 13 = \frac{p-19}{2} + 1 \Rightarrow p = 43$

Luego:
$t_{13} = C_{12}^{24}(a^m)^{12}\,.\,(b^{n-8})^{12}$

$t_{13} = C_{12}^{24}a^{12m}\,.\,b^{12n-96}$

Por dato:

$a^{12m} \cdot b^{12n-96} = a^{48} \cdot b^{132}$

$12m = 48 \Rightarrow m = 4$

$12n - 96 = 132 \Rightarrow n = 19$

Piden: $m + n + p = 4 + 19 + 43 = 66$

Clave A

26. $C_2^x + C_2^{x-1} + C_2^{x-2} = 136$

Por definición:

$$\frac{\underline{|x}}{\underline{|x-2}\,\underline{|2}} + \frac{\underline{|x-1}}{\underline{|x-3}\,\underline{|2}} + \frac{\underline{|x-2}}{\underline{|x-4}\,\underline{|2}} = 136$$

$$\frac{x(x-1)\underline{|x-2}}{\underline{|x-2}} + \frac{(x-1)(x-2)\underline{|x-3}}{\underline{|x-3}} +$$

$$\frac{(x-2)(x-3)\underline{|x-4}}{\underline{|x-4}} = 136 \cdot 2$$

$x(x-1) + (x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) = 272$

Reduciendo:

$x^2 - 3x - 88 = 0$

$x \quad -11$ \} $x = 11$

$x \quad 8$ \} $\vee$ $x = -8$

$\Rightarrow x = 11$

Clave E

27. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^{-1}})^{42}$

Sea:

$t_{k+1} = C_k^{42} (\sqrt{x})^{42-k} \cdot (\sqrt[3]{x^{-1}})^k$

Reduciendo:

$t_{k+1} = C_k^{42} \cdot x^{\frac{126-5k}{6}}$

$t_{k+1} = C_k^{42} \cdot x^{21 - \frac{5k}{6}}$

Se observa que el binomio tiene 43 términos, entonces k toma 43 valores.
Para que la expresión sea racional se debe cumplir que:
$k = 0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42$
Hay 8 términos racionales. Sabemos que:
n.° de términos = n.° términos racionales + n.° de términos irracionales.
43 = 8 + n.° términos irracionales

$\Rightarrow$ n.° términos irracionales = 43 – 8 = 35

Clave C

28. $P(x;a) = \left[\frac{a}{x}\left(\frac{a^2}{x^2} + 3\right) - \frac{x}{a}\left(\frac{x^2}{a^2} + 3\right)\right]^6$

$P(x;a) = \left[\frac{a^3}{x^3} + \frac{x^3}{a^3} + 3\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)\right]^6$

$P(x;a) = \left[\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{a^2}{x^2} - 1 + \frac{x^2}{a^2}\right) + 3\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)\right]^6$

$P(x;a) = \left[\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{a^2}{x^2} + 2 + \frac{x^2}{a^2}\right)\right]^6$

$P(x;a) = \left[\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^2\right]^6$

$P(x;a) = \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{18}$

$t_{k+1} = C_k^{18}\left(\frac{a}{x}\right)^{18-k}\left(\frac{x}{a}\right)^k = C_n^m$

$C_k^{18}\frac{a^{18-2k}}{x^{18-2k}} = C_n^m$

$C_k^{18}\left(\frac{a}{x}\right)^{18-2k} = C_n^m \quad ...(1)$

Luego:

$18 - 2k = 0 \Rightarrow k = 9$

Entonces, de (1):

$m = 18 \wedge n = k = 9$

$\therefore \frac{m}{n} = 2$

Clave B

29. $\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^8$

$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^8\left(x + \frac{1}{x}\right)^{8-k}(1)^k$

$t_{k+1} = C_k^8 C_p^{8-k} x^{8-k-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$

$t_{k+1} = C_k^8 C_p^{8-k} x^{8-k-2p} \quad ...(1)$

Como el término es independiente de x:

$8 - k - 2p = 0$

$\Rightarrow k + 2p = 8$

k	p
0	4
2	3
4	2
6	1
8	0

Reemplazando estos valores en (1):

T. independiente:

$= C_0^8 C_4^8 + C_2^8 C_3^6 + C_4^8 C_2^4 + C_6^8 C_1^2 + C_8^8 C_0^0$

$\therefore$ T. independiente = 1107

Clave D

Resolución de problemas

30. Fórmula de Leibniz:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k)^n = \sum \frac{n!(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_k^{\alpha_k})}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!...\alpha_k!}$$

Donde:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_k = n$

En el problema:

$$\sum \frac{5!(1)^{\alpha_1}(-3x)^{\alpha_2}(5x^2)^{\alpha_3}(x^4)^{\alpha_4}(x^5)^{\alpha_5}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!\alpha_5!} \quad ...(1)$$

El término general es:

$$\frac{5!(-3)^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} x^{\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!\alpha_5!}$$

Del dato y del enunciado:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 5 \quad ...(2)$

$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 = 16 \quad ...(3)$

Resolviendo (2) y (3):

$\alpha_5 = 0; \alpha_4 = 4; \alpha_3 = 0; \alpha_2 = 0; \alpha_1 = 1$

$\alpha_5 = 0; \alpha_4 = 3; \alpha_3 = 2; \alpha_2 = 0; \alpha_1 = 0$

$\alpha_5 = 1; \alpha_4 = 2; \alpha_3 = 1; \alpha_2 = 1; \alpha_1 = 0$

$\alpha_5 = 2; \alpha_4 = 1; \alpha_3 = 0; \alpha_2 = 2; \alpha_1 = 0$

$\alpha_5 = 2; \alpha_4 = 0; \alpha_3 = 3; \alpha_2 = 0; \alpha_1 = 0$

$\alpha_5 = 3; \alpha_4 = 0; \alpha_3 = 0; \alpha_2 = 1; \alpha_1 = 1$

$\alpha_5 = 2; \alpha_4 = 1; \alpha_3 = 1; \alpha_2 = 0; \alpha_1 = 1$

Luego el coeficiente de x^{16} se obtiene al reemplazar los valores obtenidos en (1):

$$\Rightarrow \Sigma\text{coef. } x^{16}: \frac{5!(-3)^0(5)^0}{1!0!0!4!0!} + \frac{5!(-3)^0(5)^2}{0!0!2!3!0!}$$

$$+ \frac{5!(-3)^1(5)^1}{0!1!1!2!1!} + \frac{5!(-3)^2(5)^0}{0!2!0!1!2!} +$$

$$\frac{5!(-3)^0(5)^3}{0!0!3!0!2!} + \frac{5!(-3)^1(5)^0}{1!1!0!0!3!} + \frac{5!(-3)^0 5^1}{1!0!1!1!2!}$$

$\therefore \Sigma$coef. de x^{16} es: 1115

Clave D

31. $\underline{e}$ __ __ __ __ __

(↑ s bajo la cuarta posición)

(hay 5 posibilidades).

$\therefore C_1^3 . C_3^5 . 5! = 3600$

Clave B

RADICACIÓN Y RACIONALIZACIÓN

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 51) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

I. Incorrecto

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

II. Incorrecto

$$\sqrt{11-\sqrt{120}} = \sqrt{5+6-2\sqrt{5.6}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

III. Incorrecto

$$\sqrt{m+7+2\sqrt{7m}} = \sqrt{m} + \sqrt{7}$$

IV. Correcto

$$\sqrt{49+2x^2\sqrt{49-x^4}} = \sqrt{x^4} + \sqrt{49-x^4}$$
$$= x^2 + \sqrt{49-x^4}$$

V. Incorrecto

$$\sqrt[4]{28+2\sqrt{192}} = \sqrt{\sqrt{(16+12)+2\sqrt{16.12}}}$$
$$= \sqrt{3+1+2\sqrt{31}}$$
$$= \sqrt{3} + 1$$

Luego, lo correcto es IV.

2.

Falso (F):
Los radicales semejantes tienen la misma expresión subradical y el mismo índice, y no como específica el enunciado que solo posee la misma expresión subradical.

Verdadero (V):
La racionalización permite transformar el denominador irracional a uno racional, luego el enunciado es verdadero.

Falso (F):
Los radicales homogéneos tienen el mismo indice, pero no necesariamente el mismo radicando.

Falso (F):
El factor racionalizante y el denominador de la fracción son expresiones irracionales que al multiplicarlas se convierten en una expresión racional. Si el denominador fuese una expresión racional, no haríamos uso del factor racionalizante. Esta proposición es falsa.

Razonamiento y demostración

3. $$A = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} + \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} - \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})} - \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3} + \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} - \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5} + \frac{-2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

$$A = \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{7}-\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3} = 0$$

Clave A

4. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\ldots$

Pasando a radicales simples:

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\ldots$$
$$\ldots+(\sqrt{36}-\sqrt{35})+(\sqrt{37}-\sqrt{36}) = \sqrt{37}-1 =$$

Clave B

5. $$A = \sqrt{10-4\sqrt{6}}\,.\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}$$

$$A = \sqrt{10-2\sqrt{4\times 6}}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3\times 2}}{2}}$$

$$A = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{4})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1$$

Clave A

6. $$\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x})} = \frac{4x.\sqrt[3]{x^2}}{3(\sqrt[3]{x}).\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x(\sqrt[3]{x^2})}{3x} = \frac{4}{3}(\sqrt[3]{x^2})$$

Clave B

7. $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(6+5)-2\sqrt{6\times 5}}} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \sqrt{6}+\sqrt{5}$$

Clave B

8. $$Z = \frac{\sqrt{32+4\sqrt{63}}}{\sqrt{32-4\sqrt{63}}}$$

Simplificando:

$$Z = \frac{\sqrt{16+2\sqrt{63}}}{\sqrt{16-2\sqrt{63}}}$$

$$Z = \frac{\sqrt{(9+7)+2\sqrt{9.7}}}{\sqrt{(9+7)-2\sqrt{9.7}}}$$

$$Z = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{7}}{\sqrt{9}-\sqrt{7}} \times \frac{(3+\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})}$$

$$Z = \frac{16+6\sqrt{7}}{9-7} = 8+3\sqrt{7}$$

Clave E

Resolución de problemas

9. $$R = \sqrt{10}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{7}}-\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{7}}}\right]$$

$$R^2 = 10\left[\frac{2\sqrt{10}+2}{2\sqrt{10}-2.3}\right]$$

$$R^2 = 10\frac{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}+3)}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}$$

$$R^2 = 10(13+4\sqrt{10})$$

$$R = \sqrt{10}\sqrt{13+4\sqrt{10}} = \sqrt{10}(\sqrt{13+2\sqrt{40}})$$

$$R = \sqrt{10}\left(\sqrt{(8+5)+2\sqrt{8.5}}\right)$$

$$R = \sqrt{10}(\sqrt{8}+\sqrt{5}) = \sqrt{80}+\sqrt{50}$$

$R = \sqrt{16.5} + \sqrt{25.2} = 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$

$R = 4\sqrt{5} + 5\sqrt{\frac{4}{2}} = \alpha\sqrt{\theta} + \theta\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \alpha = 4 \wedge \theta = 5$

$\therefore \alpha . \theta = 20$

Clave C

10. Racionalizando:

$$\frac{x^9 + 1 + 7x^2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{(x+2)^3} + \sqrt[3]{7}} =$$

$$\frac{x^9 + 1 + 7x^2\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{(x+2)^3} + \sqrt[3]{7}}\left(\frac{\sqrt[3]{(x+2)^6} - \sqrt[3]{(x+2)^3 7} + \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^6} - \sqrt[3]{(x+2)^3 7} + \sqrt[3]{7^2}}\right)$$

$$= \frac{(x^9 + 1 + 7x^2\sqrt[3]{7})FR}{(x+2)^3 + 7}$$

Como respuesta nos piden:

$\left(\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7}}{5}\right)$ TI (numerador) =

$$\left(\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{7}}{5}\right)(0^9 + 1 + 0)(\sqrt[3]{2^6} - \sqrt[3]{2^3 7} + \sqrt[3]{7^2})$$

$$= \frac{8+7}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Clave E

Nivel 2 (página 51) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

I. $n \in \mathbb{Z}^+$; n es impar
II. $n \in \mathbb{Z}^+$; $n \geq 2$
III. $n \in \mathbb{Z}^+$; n es par

12.

Clave D

Razonamiento y demostración

13. $M = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3-1}}\right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]^{-1}$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore M = \frac{1+\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Clave A

14. $E = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5 - 3\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{(6+2) + 2\sqrt{6.2}}}}$

$E = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5 - 3\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}$

$E = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$

$E = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{(3+2) - 2\sqrt{3.2}}}$

$E = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} \Rightarrow E = \sqrt[4]{3}$

Clave B

15. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \sqrt{5}$

$$= \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} - \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}+2}{5-4} - \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2$$

Clave D

16. $E = \frac{(a+\sqrt{a^2-1})(a+\sqrt{a^2-1})}{(a-\sqrt{a^2-1})(a+\sqrt{a^2-1})} - \frac{(a-\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})}{(a+\sqrt{a^2-1})(a-\sqrt{a^2-1})}$

$$E = \frac{(a+\sqrt{a^2-1})^2}{a^2 - (\sqrt{a^2-1})^2} - \frac{(a-\sqrt{a^2-1})^2}{(a^2 - (\sqrt{a^2-1})^2)}$$

$$E = (a+\sqrt{a^2-1})^2 - (a-\sqrt{a^2-1})^2$$

$$E = 4a\sqrt{a^2-1} = 4\sqrt{a^2(a^2-1)}$$

$$\Rightarrow E = 4\sqrt{\underbrace{a^4 - a^2}_{6}} = 4\sqrt{6}$$

Clave A

17. $H = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}}} - \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$$H = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2+\sqrt{3}})} - \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - \sqrt{2-\sqrt{3}})\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{2 + \sqrt{4+2\sqrt{3}}} - \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2 - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$H = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+1} - \frac{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2-(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$\therefore H = 0$

Clave A

18. $T = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{(x-1)(1)}} + \sqrt{x - 2\sqrt{(x-1)(1)}}}{\sqrt{y + 2\sqrt{(y-1)(1)}} + \sqrt{y - 2\sqrt{(y-1)(1)}}}$

Pasando a radical simple:

$x > 2 \wedge y < 2$

$$T = \frac{\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1}{1 + \sqrt{y-1} + 1 - \sqrt{y-1}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{x-1}$$

Clave C

Resolución de problemas

19. $C_x^y = C_x^{x+3} = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{6}$

$$f = \frac{1}{\sqrt[2C_x^y]{5^{C_x^y}} + \sqrt[3C_x^y]{7^{C_x^y}}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[6]{125} + \sqrt[6]{49}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{125} + \sqrt[6]{49}}\left(\frac{\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49}}{\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49}}\right) = \frac{\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{49}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{49}}\left(\frac{\sqrt[3]{125^2} + \sqrt[3]{125(49)} + \sqrt[3]{49^2}}{\sqrt[3]{125^2} + \sqrt[3]{125(49)} + \sqrt[3]{49^2}}\right)$$

$= \dfrac{(\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49})FR}{125 - 49} = \dfrac{(\sqrt[6]{125} - \sqrt[6]{49})FR}{76}$

Denominador racionalizado: 76

Clave E

20. Por condición del problema:

$\sqrt{m + \sqrt{n}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$m + \sqrt{n} = a + b + \sqrt{4ab}$

$\Rightarrow\ m = a + b\ \wedge\ n = 4ab \qquad ...(1)$

Reemplazando (1) en:

$84m + 21n = 84t^2 + 672t - 84$

$84(a + b) + 21(4ab) = \text{"}$

$\not{4}.\not{3}.\not{7}(a + b) + \not{4}.\not{7}.\not{3}\,ab = \not{84}t^2 + 6\not{72}t - \not{84}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \not{12} \qquad \not{96} \qquad \not{12}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 4 \qquad \not{32} \qquad 4$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 8$

$a + b + ab = t^2 + 8t - 1 \qquad ...(2)$

Asumiendo:

$\left.\begin{array}{l} a = t + \alpha \\ b = t + \beta \end{array}\right\} \qquad ...(3)$

(3) en (2):

$2t + \alpha + \beta + (t + \alpha)(t + \beta) = t^2 + 8t - 1$

Operando el primer miembro:

$t^2 + (\alpha + \beta + 2)t + (\alpha + \beta + \alpha\beta) = t^2 + 8t - 1$

Donde:

$\alpha + \beta + 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 6$

$\alpha + \beta + \alpha\beta = -1 \ \Rightarrow \ 6 + \alpha\beta = -1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \alpha\beta = -7$

$\alpha = 7\ \wedge\ \beta = -1$

"α y β" en (3):

$a = t + 7$

$b = t - 1$

Nos piden:

$\sqrt{a} = \sqrt{t + 7} \Rightarrow (\sqrt{a})^2 = t + 7$

o

$\sqrt{b} = \sqrt{t - 1} \Rightarrow (\sqrt{b})^2 = t - 1$

Clave A

Nivel 3 (página 52) Unidad 2

Comunicación matemática

21. Es fácil determinar las cifras que faltan para llegar a 9.

Por ejemplo, hay 5 tipos de radicales de la forma $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$, esto significa que faltan 4 para llegar a 9. Por eso se determina que debe haber un 4 como cifra a completar.

Por lo expuesto; esa es la relación que tienen dichos números con el número 9.

Hay 4 tipos de radicales:

I. $\sqrt{4 + \sqrt{7}}$ II. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}$

III. $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ IV. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$

Reduciendo los radicales:

I. $\sqrt{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} + \sqrt{\dfrac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

II. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \dfrac{7\sqrt[3]{x^2}}{x}$

III. $\sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(2 + 1) - 2\sqrt{2.1}} = \sqrt{2} - 1$

IV. $\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3 + 1) + 2\sqrt{3.1}} = \sqrt{3} + 1$

Clave D

22.

I. RACIONALIZACIÓN
II. HOMOGÉNEOS
III. SEMEJANTES
IV. RACIONALIZANTE
V. RADICACIÓN
VI. DOBLES

23.

Ejercicio	Resultado	Letra
Indica el denominador obtenido al racionalizar: $\dfrac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$	12	G
Transforma a radicales simples: $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2} + 1$	A
Racionaliza: $\dfrac{23}{\sqrt{27 + 2\sqrt{50}}}$	$5 - \sqrt{2}$	U
Al racionalizar: $M = \dfrac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{8}}$ se obtiene como denominador:	6	S
Si: $H = \sqrt{3 + \sqrt{7}}\left(\sqrt{13 - \sqrt{7}} - \sqrt{5 - \sqrt{7}}\right)$ halla: H + 2	6	S

Razonamiento y demostración

24. De la fracción: $R = \dfrac{1}{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}$

Reduciendo:

$\therefore\ R = \dfrac{1}{9\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{18}$

Clave E

25. $P = \dfrac{4x^2(x^2 - 1)(x^4 - 1)(x^6 - 1)}{(x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^4 - 1)}$

$P = \dfrac{4x^2(x^2 - 1)(x^6 - 1)}{(x^8 + 1)(x^4 + 1)}$

$P = \dfrac{4\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(x^4 + \dfrac{1}{x^4}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad ...(1)$

Como:

$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1 \\ \Rightarrow\ x - \dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 6 \end{array}\right\} x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 34$

$x^3 - \dfrac{1}{x^3} - 3(2) = 8$

$\Rightarrow x^3 - \dfrac{1}{x^3} = 14$

Por lo tanto, reemplazando en (1):

$$P = \frac{4\,.\,2\,.\,14}{6\,.\,34} = \frac{28}{51}$$

Clave B

26. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = \sqrt{2}^3 + 3\sqrt{2}^2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\,.\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^3$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ ...(1)

$(2-\sqrt{2})^3 = 2^3 - 3.2^2\sqrt{2} + 3.2\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3$

$\Rightarrow (2-\sqrt{2})^3 = 20 - 14\sqrt{2}$ ...(2)

$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = \sqrt[4]{97+2\sqrt{2352}} = \sqrt[4]{(49+48)+2\sqrt{49.48}}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{49}+\sqrt{48})} = \sqrt{7+2\sqrt{12}}$

$\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = \sqrt{(4+3)+2\sqrt{4.3}} = \sqrt{4}+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{97+56\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ ...(3)

Reemplazando en (1); (2) y (3) en lo que piden:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}}{2+\sqrt{3}}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Clave C

27. $\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{2x-\frac{1}{4}}} = \sqrt{x+2\sqrt{\frac{x}{8}-\frac{1}{64}}}$

Resolviendo:

$$= \sqrt{x+2\sqrt{\frac{8x-1}{64}}} = \sqrt{\left(\frac{8x-1}{8}+\frac{1}{8}\right)+2\sqrt{\left(\frac{8x-1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{8x-1}{8}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{8}}}_{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Clave B

28. $\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+22+10\sqrt{x-3}} = 27$

Dando forma:

$\sqrt{x+1+2\sqrt{4(x-3)}} + \sqrt{x+22+2\sqrt{25(x-3)}} = 27$

Pasando a radicales simples:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{4}+\sqrt{x-3}+\sqrt{25} = 27$$
$$2\sqrt{x-3} = 20$$
$$\sqrt{x-3} = 10$$
$$\Rightarrow x = 103$$

Clave D

29. $K = \dfrac{64}{\sqrt[3]{5}^2 + 2\sqrt[3]{5} + 1 - 4}$

$K = \dfrac{64}{(\sqrt[3]{5}+1)^2 - 2^2}$

$K = \dfrac{64}{(\sqrt[3]{5}+3)(\sqrt[3]{5}-1)} = \dfrac{64}{(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3^3})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{1})}$

Racionalizando:

$$K = \frac{64\times(\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2)(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5}+3)(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2)(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1)}$$

$$K = \frac{64(\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2)(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1)}{\{(\sqrt[3]{5})^3+3^3\}\{(\sqrt[3]{5})^3-1^3\}}$$

$$K = \frac{64(\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2)(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1)}{32\times 4}$$

$$K = \frac{(\sqrt[3]{5}^2-3\sqrt[3]{5}+3^2)(\sqrt[3]{5}^2+\sqrt[3]{5}+1)}{2}$$

Clave A

Resolución de problemas

30. Escribimos de otra manera la expresión pedida:

$$R = \sqrt{\frac{mr^2}{r}+\frac{ns^2}{s}+\frac{pt^2}{t}}$$

Pero, según la condición: $mr^2 = ns^2 = pt^2$

$R = \sqrt{mr^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)} = 2r\sqrt{m}$

$\frac{R}{2r} = \sqrt{m}$ ...(1)

Asimismo:

$R = \sqrt{\frac{ns^2}{r}+\frac{ns^2}{s}+\frac{ns^2}{t}} = \sqrt{ns^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)} = 2s\sqrt{n}$

$\frac{R}{2s} = \sqrt{n}$ ...(2)

Se puede afirmar también:

$\frac{R}{2t} = \sqrt{p}$ ...(3)

(1) + (2) + (3):

$\frac{R}{2r}+\frac{R}{2s}+\frac{R}{2t} = \sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}$

$\frac{R}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)}_{4} = \sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}$

$\therefore R = 0,5(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})$

Clave C

31. Del enunciado:

$\sqrt[16]{x^2+y^2+mnp} + \sqrt[16]{x^2+y^2-mnp} = m$ ...(1)

$\sqrt[16]{x^2+y^2+mnp} - \sqrt[16]{x^2+y^2-mnp} = n$ ...(2)

$\sqrt[8]{x^2+y^2+mnp} + \sqrt[8]{x^2+y^2-mnp} = p$ ...(3)

$\sqrt[4]{x^2+y^2+mnp} + \sqrt[4]{x^2+y^2-mnp} = q$ ...(4)

(1) × (2):

$\sqrt[8]{x^2+y^2+mnp} - \sqrt[8]{x^2+y^2-mnp} = mn$ ...(5)

(3) × (5):

$\sqrt[4]{x^2+y^2+mnp} - \sqrt[4]{x^2+y^2-mnp} = mnp$ ...(6)

(4) × (6):

$\sqrt{x^2+y^2+mnp} - \sqrt{x^2+y^2-mnp} = mnpq$ ...(7)

(7) por lo solicitado:

$(x^2+y^2+mnp)-(x^2+y^2-mnp)=mnpqH$

$(x^2+y^2)+mnp-(x^2+y^2)+mnp=mnpqH$

$2mnp=mnpqH$

$\therefore H=\dfrac{2}{q}$

Clave B

32. Asumimos:

$A(t)=pt+q+rt+s \quad ...(1)$

$\dfrac{B(t)}{4}=(pt+q)(rt+s)$

$B(t)=4(pt+q)(rt+s) \quad ...(2)$

(1) + (2):

$pt+q+rt+s+4(pt+q)(rt+s)=252t^2+192t+26$

$4prt^2+(p+r+4ps+4qr)t+(4qs+q+s)=252t^2+192t+26$

$4pr=252 \;\wedge\; p+r+4ps+4qr=192$

$pr=63 \qquad 16+4(7)s+4q(9)=192$

$\boxed{p=7}$

$\boxed{p=9} \qquad 4+7s+9q=48$

$s=\dfrac{44-9q}{7} \quad ...(3)$

$4qs+q+s=26 \quad ...(4)$

(3) en (4):

$4q\left(\dfrac{44-9q}{7}\right)+q+\dfrac{44-9q}{7}=26$

$4q(44-9q)+7q+44-9q=182$

$176q-36q^2-2q-138=0$

$-36q^2+174q-138=0$

$36q^2-174q+138=0$

$18q^2-87q+69=0$

$$\begin{array}{lll} 18q & -69 & -69q \\ q & -1 & -18q \\ & & \overline{-87q} \end{array}$$

$(18q-69)(q-1)=0$

$\boxed{q=1}$; $(q\in\mathbb{N}) \quad ...(5)$

(5) en (3):

$s=\dfrac{44-9(1)}{7}=5 \Rightarrow \boxed{s=5}$

Nos piden:

$p+q+r+s=7+1+9+5=22$

Clave E

33. Dando una forma adecuada al radical.

$$\sqrt{20dx^2+2c^{-2}y^2+2\sqrt{\left(\frac{ab-9c^{-2}}{2}\right)x^2\cdot\frac{dy^2}{2}}}$$

Se sabe:

$\left(\dfrac{ab-9c^{-2}}{2}\right)x^2+\dfrac{d}{2}y^2=20dx^2+2c^{-2}y^2$

$(ab-9c^{-2})x^2+dy^2=40dx^2+4c^{-2}y^2$

Identificando términos:

$ab-9c^{-2}=40d \quad ...(1)$

$d=4c^{-2} \quad ...(2)$

(2) en (1):

$ab-9c^{-2}=40(4c^{-2})=160c^{-2}$

$\Rightarrow abc^2=169 \quad ...(3)$

Reemplazando (3) en la fracción a racionalizar:

$$\frac{\sqrt{7-\sqrt[4]{abc^2}}}{6(\sqrt[4]{abc^2}-1)}=\frac{\sqrt{7-\sqrt[4]{169}}}{6(\sqrt[4]{169}-1)}=\frac{\sqrt{7-\sqrt{13}}}{6(\sqrt{13}-1)}=\frac{\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{2}}}{6(\sqrt{13}-1)}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

Nos piden: $4(12)=48$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 55) Unidad 2

1. Como: k es par $\Rightarrow$ existen $\left(\frac{2k}{4}\right)$ grupos exactos de 4 sumandos.

$S = (i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + ...$

$S = (2 - 2i) + (2 - 2i) + ... + \left(\frac{2k}{4}\right)$ sumandos

$S = 2(1 - i)\left(\frac{2k}{4}\right) \Rightarrow S = k(1 - i)$

Clave C

2. $E = \dfrac{i^{2!} \, . \, i^{\overset{\circ}{4}} \, . \, i^{\overset{\circ}{4}} ... i^{\overset{\circ}{4}}}{i \, . \, 1^{3!} \, . \, i^{\overset{\circ}{4}} ... i^{\overset{\circ}{4}}}$

$E = \dfrac{i^2}{i^6 \, . \, i} \, . \, \dfrac{i}{i} = \dfrac{i^3}{i^8} = \dfrac{-i}{1}$

$\therefore E = -i$

Clave A

3. $A = \left[\dfrac{1 - i^7}{1 + i^{11}} + \dfrac{1 + i^{15}}{1 - i^{19}}\right]^{40}$

$i^7 = i^4 \, . \, i^3 = i^3 = -i$

$i^{11} = i^8 \, . \, i^3 = i^3 = -i$

$i^{15} = i^{12} \, . \, i^3 = i^3 = -i$

$i^{19} = i^{16} \, . \, i^3 = i^3 = -i$

$\Rightarrow A = \left[\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}\right]^{40}$

Pero:

- $\dfrac{(1 + i)}{(1 - i)} \, . \, \dfrac{(1 + i)}{(1 + i)} = \dfrac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \dfrac{2i}{2} = i$
- $\dfrac{(1 - i)}{(1 + i)} \, \dfrac{(1 - i)}{(1 - i)} = \dfrac{1 - 2i + i^2}{1 - i^2} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

$A = [i + (-i)]^{40} = 0$

Clave E

4. $A = \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 + i}}}}}$

$A = \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{(1 - i)(1 + i)}{2i}}}}$

$A = \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{1 - i}{1 - \dfrac{(1 - i)i}{i - 1}}}$

$A = \dfrac{(1 - i)(1 + i)}{2i}$

$A = \dfrac{1 - i^2}{2i} = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{1}{i} \, . \, \dfrac{i}{i} = -i$

Clave D

5. Por dato: $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + bi$

Además:

$|z| - z = 3 + i$

$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - (a + bi) = 3 + i$

$\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 3 + i$

Entonces:

$-bi = i \Rightarrow b = -1$

$\sqrt{a^2 + b^2} - a = 3$

$\sqrt{a^2 + 1} = 3 + a$

$a^2 + 1 = 9 + 6a + a^2$

$\Rightarrow a = -\dfrac{4}{3}$

Luego:

$z = -\dfrac{4}{3} + (-1)i = -\dfrac{(4 + 3i)}{3}$

$\therefore z^{-1} = -3(4 + 3i)^{-1}$

Clave D

6. $(a + bi)^2 = 1 - 2\sqrt{6}\,i$

$a^2 - b^2 + 2abi = 1 - 2\sqrt{6}\,i$

Donde:

$2ab = -2\sqrt{6} \Rightarrow ab = -\sqrt{6}$

$(ab)^2 = 6$

$a^2 - b^2 = 1$

Multiplicando por a^2:

$a^4 - a^2b^2 = a^2$

$a^4 - a^2 = 6$

$\underline{a^2}(\underbrace{a^2 - 1}) = 3 \times 2 \Rightarrow \quad a = -\sqrt{3}$

$ab = -\sqrt{6} \Rightarrow (-\sqrt{3})(b) = -\sqrt{6}$

$b = \sqrt{2}$

Nos piden:

$\dfrac{a}{b} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Clave D

7. $(1 + i)^2 + (1 + i)^4 + (1 + i)^6 + (1 + i)^8 = x + yi$

$(1 + i)^2 + [(1 + i)^2]^2 + [(1 + i)^2]^3 + [(1 + i)^2]^4 = x + yi$

Sabemos que: $(1 + i)^2 = 2i$

Reemplazando:

$2i + (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = x + yi$

$2i - 4 - 8i + 16 = x + yi$

$x + yi = 12 - 6i$

$\Rightarrow x = 12; \; y = -6$

Nos piden:

$F(x; y) = \dfrac{x + y}{x - y} \Rightarrow F(12; -6) = \dfrac{12 - 6}{12 - (-6)} = \dfrac{1}{3}$

Clave E

8. $|z| = \sqrt{(1 + \cos 74°)^2 + \text{sen}^2 74°}$

$|z| = \sqrt{1 + 2\cos 74° + \cos^2 74° + \text{sen}^2 74°}$

$|z| = \sqrt{2(1 + \cos 74°)} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 37°}$

$\Rightarrow |z| = 2\cos 37° = 2\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$

$\therefore |z| = 1{,}6$

Clave D

9. $Z = \sqrt{\dfrac{(1 + 3i)(2 + 2i)}{(\sqrt{3} + \sqrt{7}\,i)(1 - i)}}$

Nos piden: $|Z|$

$|Z|^2 = \left|\dfrac{(1 + 3i)(2 + 2i)}{(\sqrt{3} + \sqrt{7}\,i)(1 - i)}\right|$

$|Z|^2 = \dfrac{|1 + 3i||2 + 2i|}{|\sqrt{3} + \sqrt{7}\,i||1 - i|}$

$|Z|^2 = \dfrac{\sqrt{10} \, . \, \sqrt{8}}{\sqrt{10} \, . \, \sqrt{2}}$

$|Z| = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

Clave A

10. $z = \dfrac{1}{1 + i + \dfrac{1}{1 - i + \dfrac{1}{1 + i}}}$

$z = \dfrac{1}{1 + i + \dfrac{1 + i}{(1 - i)(1 + i) + 1}}$

$z = \dfrac{1}{1 + i + \dfrac{1 + i}{3}} = \dfrac{1}{\dfrac{4 + 4i}{3}}$

$z = \dfrac{3(1 - i)}{4(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{3}{8}(1 - i)$

$|z| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{8}\right)^2} = \dfrac{3}{8}\sqrt{2}$

Clave E

11. $\sqrt[3x]{2i - 2} + \sqrt[2x]{2i} + \sqrt[x]{1 + i} = 96i$

Sabemos que:

$(1 + i)^3 = -2i(1 + i) = 2i - 2$

$(1 + i)^2 = 2i$

Reemplazando:

$\sqrt[3x]{(1 + i)^3} + \sqrt[2x]{(1 + i)^2} + \sqrt[x]{1 + i} = 96i$

$\sqrt[x]{1 + i} + \sqrt[x]{1 + i} + \sqrt[x]{1 + i} = 96i$

$3\sqrt[x]{1 + i} = 96i \Rightarrow \sqrt[x]{1 + i} = 32i$

$\sqrt[2x]{(1 + i)^2} = 2^5 i = 2^5 i^5 = (2i)^5$

$(2i)^{1/2x} = (2i)^5$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2x} = 5$

$\therefore x = \dfrac{1}{10}$

Clave A

12. $M = \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\sqrt{i^{11}\sqrt{1 - \sqrt{2^9\sqrt{i}}}}}}$

Sabemos que: $i = i^9$; $-i = i^{11}$; $i^2 = i^{10}$

$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\sqrt{i^{11}\sqrt{1 - \sqrt{2i}}}}}$

Teniendo en cuenta: $2i = (1 + i)^2$, se tiene:

$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\sqrt{i^{11}\sqrt{\underbrace{1 - (1 + i)}_{-i}}}}}$

$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\underbrace{\sqrt{i^{11}\sqrt{i^{11}}}}_{i^2}}} = \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\underbrace{\sqrt{i^{10}}}_{i}}}$

$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2i}} = \sqrt[3]{-2\sqrt{(1 - i)^2}}$

$$\sqrt[3]{2i-2} = \sqrt[3]{(1+i)^3}$$

$$\therefore M = \sqrt[3]{(1+i)^3} = 1+i$$

Clave E

13. $H = \dfrac{(1-i)^{502} + (1+i)^{501}}{(1+i)^{502} + (1-i)^{501}}$

Dando forma:

$$H = \frac{[(1-i)^4]^{125}(1-i)^2 + [(1+i)^4]^{125}(1+i)}{[(1+i)^4]^{125}(1+i)^2 + [(1-i)^4]^{125}(1-i)}$$

$$H = \frac{(-4)^{125}.(-2i) + (-4)^{125}.(1+i)}{(-4)^{125}.(2i) + (-4)^{125}.(1-i)}$$

$$H = \frac{(-4)^{125}.(1-i)}{(-4)^{125}.(1+i)} = -i$$

Clave A

14. Del enunciado:

$$w = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2-3i} = \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{2-3i}$$

$$w = e^{\frac{2\pi}{3}i+\pi} = e^{\pi} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$w = e^{\pi}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \text{Arg}(w) = \frac{2\pi}{3}$$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 57) Unidad 2

Comunicación matemática

1. (V) $4 + 3i = \sqrt{4^2+3^2}\,e^{i\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)} = 5e^{i\left(\frac{37\pi}{180}\right)}$

(F) $3 + 4i = \sqrt{3^2+4^2}\,e^{i\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)} = 5e^{i\left(\frac{53\pi}{180}\right)}$

(F) $10(1-i) = 10\sqrt{1^2+(-1)^2}\,e^{i\text{Arctan}(-1)} = 10\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

(V) $1 + \cos30° + i\text{sen}30°$

$= 1 + 2\cos^2 15° - 1 + 2i\text{sen}15°\cos15°$

$= 2\cos15°(\cos15° + i\text{sen}15°)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}$

$= 2e^{i\frac{\pi}{12}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2. (I)

Sea: $z = \cos x + i\text{sen}x$

$z^r = \cos(rx) + i\text{sen}(rx)$ ...(I)

$z^{-r} = \cos(rx) - i\text{sen}(rx)$ ...(II)

De (I) y (II):

$$\text{sen}(rx) = \frac{z^r - z^{-r}}{2i} \;\wedge\; \cos(rx) = \frac{z^r + z^{-r}}{2}$$

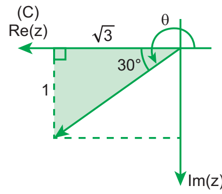
$$\text{sen}^3 x = \left(\frac{z^1 - z^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{(z^3 - z^{-3}) - 3(z - z^{-1})}{-8i}$$

$$\text{sen}^3 x = \frac{\left(\frac{z^3 - z^{-3}}{2i}\right) - 3\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)}{\frac{-8i}{2i}}$$

$$\text{sen}^3 x = \frac{1}{4}(3\text{sen}x - \text{sen}3x)$$

(C)

$$i^{30\,214} = i^{\overset{\circ}{4}+2} = i^2 = -1$$



$\Rightarrow \theta = 270° - 60°$

$\theta = 210°$

Razonamiento y demostración

3. Del enunciado:

$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$

$z^2(z-1) + (z-1) = 0$

$(z-1)(z^2+1) = 0$

$\Rightarrow (z-1) = 0 \;\vee\; z^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow z = 1 \;\vee\; \underbrace{z^2 = -1}_{z = i \,\vee\, z = -i}$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \delta = 1 + i - i$

$\therefore \alpha + \beta + \delta = 1$

Clave C

4. Elevando al cubo el dato del enunciado, tenemos:

$4 - 2i = (a + bi)^3$

$4 - 2i = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$

$\Rightarrow 4 - 2i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$

Luego:

$a^3 - 3ab^2 = 4 \Rightarrow a^4 - 3a^2b^2 = 4a$ ...(1)

$3a^2b - b^3 = -2 \Rightarrow 3a^2b^2 - b^4 = -2b$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$a^4 - b^4 = 4a - 2b = 2(2a - b)$

Piden:

$$M = \frac{b^4 - a^4}{2a - b} = \frac{-2(2a-b)}{(2a-b)}$$

$\therefore M = -2$

Clave B

5. Por dato:

$$z = e^{\frac{2-i}{2+i}} = e^{\left(\frac{2-i}{2+i}\right)\left(\frac{2+i}{2-i}\right)} = e^{\frac{(2-i)^2}{4-i^2}} = e^{\frac{4-4i+i^2}{4-(-1)}}$$

$$z = e^{\frac{3-4i}{5}} = e^{\frac{3}{5}} . e^{\frac{-4}{5}i}$$

Piden:

$$|z| = \left|e^{\frac{3}{5}} \cdot e^{\frac{-4}{5}i}\right| = e^{\frac{3}{5}}$$

$$\therefore |z| = \sqrt[5]{e^3}$$

Clave C

6. $\dfrac{3+2i}{2-i} + \dfrac{(5-i)i}{(2i)i} + 2i = a + bi$

$$\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{5i+1}{-2} + 2i = a + bi$$

$$\frac{4+7i}{5} - \frac{5i+1}{2} + 2i = a + bi$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{10} \;\text{ y }\; b = \frac{9}{10}$$

Clave B

7. $z = \left[\dfrac{(\cos30° + i\text{sen}30°)^4}{2(\cos20° + i\text{sen}20°)^6}\right]^2$

$$z = \left[\frac{\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^4}{2\left(e^{\frac{i\pi}{9}}\right)^6}\right]^2 = \left[\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}\right]^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2^2} \Rightarrow z = \frac{1}{4} \qquad \therefore |z| = \frac{1}{4}$$

Clave A

8. Por propiedad:

$w^n + w^{n+1} + w^{n+2} = 0;\ \forall\, n \in \mathbb{Z};\ w \neq 0$

En el problema:

$S = (w + w^2 + w^3) + (w^4 + w^5 + w^6) + ... + (w^{25} + w^{26} + w^{27}) + w^{28} + w^{29}$

$S = w^{28} + w^{29} = (w^3)^9w + (w^3)^9w^2$

$\Rightarrow S = (1)w + (1)w^2 = w + (-w - 1)$

$\therefore S = -1$

Clave B

9. Por propiedad:

$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0;\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$

En el problema: $E = \dfrac{1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{1999}}{1 + i + i^2}$

Donde: $i + i^2 + i^3 + ... + i^{1996} = 0$

Entonces:

$$E = \frac{1 + i^{1997} + i^{1998} + i^{1999}}{1 + i + (-1)}$$

$$E = \frac{1 + i + i^2 + i^3}{i} = \frac{0}{i} = 0$$

$\therefore E = 0$

Clave E

Resolución de problemas

10. Según el enunciado:

$a + bi - (5 + 3i)^4 = 10(\cos217° + i\text{sen}217°)$ ...(1)

$10(\cos217° + i\text{sen}217°) = -8 - 6i$ ...(2)

$(5 + 3i)^4 = ((5 + 3i)^2)^2 = (16 + 30i)^2$

$= -644 + 960i$ ...(3)

(2) y (3) en (1):

$a + bi - (-644 + 960i) = -8 - 6i$

$\therefore a + bi = -652 + 954i$

Clave D

11. $(P^*)^2 = \overline{P} \Rightarrow (-M - Ni)^2 = M - Ni$

$M^2 - N^2 + 2MNi = M - Ni$

$M = M^2 - N^2$ ...(1)

$-N = 2MN \Rightarrow M = -\dfrac{1}{2}$ ...(2)

(2) en (1):

$N = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De dato: $\text{Arg}(P) \in \text{IIC}$

$\Rightarrow M < 0 \text{ y } N > 0$

$P = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos120° + i\text{sen}120°$

Clave B

Nivel 2 (página 57) Unidad 2

Comunicación matemática

12. I. (F)

En la potenciación se cumple:

$(|z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha))^n = |z|^n(\cos n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha)$

II. (F)

Las raíces son tres, pero no tienen módulo 27 sino 3.

$$\sqrt[3]{27 + ai} = \sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

3 (módulo)

III. (F)

En el campo de los números complejo $\mathbb{C}$ si tiene solución.

$\sqrt{-A} = \pm\sqrt{A}\,i$

Existen dos soluciones.

13. (F) Sea: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow z = a + 0i \Rightarrow z^* = -a$

(V) Sea el número complejo: $z = a + bi$

$z \,.\, z^* = (a + bi)(-a - bi) = -(a + bi)^2$

$= \underbrace{b^2 \,.\, a^2 - 2abi}$

Otro número complejo.

(F) $z = \sqrt[6]{7}$

$$= \sqrt[6]{7}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right)$$

$k = 0; 1; 2; 3; 4; 5$: tiene seis soluciones, pero el módulo de todas ellas es $\sqrt[6]{7}$ y no 7.

Razonamiento y demostración

14. Del enunciado:

$$V = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{10^{11^{12}}}} + i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{14^{15^{16}}}} + i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{18^{19^{20}}}}$$

$\Rightarrow V = i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+1} = i + i + i$

$\therefore V = 3i$

Clave D

15. $\dfrac{z + a}{z + b} = \dfrac{\bar{z} - b}{\bar{z} - a}$

Sea $z = m + ni \Rightarrow \bar{z} = m - ni$

Restando 1:

$\dfrac{z + a}{z + b} - 1 = \dfrac{\bar{z} - b}{\bar{z} - a} - 1$

$\dfrac{a - b}{z + b} = \dfrac{a - b}{\bar{z} - a}$

$z + b = \bar{z} - a$

$\underbrace{z - \bar{z}} = a + b$

$-2ni = a + b =$ Número real

$\Rightarrow n = 0$

Luego: $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Nos piden:

$$E = \frac{a^5 - b^5 - 5a^2b^2(a - b)}{3a^4b}$$

$$E = \frac{(-b)^5 - b^5 - 5(-b)^2b^2(-b - b)}{3(-b)^4b}$$

$$E = \frac{-2b^5 + 10b^5}{3b^5} = \frac{8b^5}{3b^5} = \frac{8}{3}$$

Clave D

16. Elevando al cubo, el dato del enunciado:

$a + bi = (m + ni)^3$

$a + bi = m^3 + 3m^2.\, ni + 3m(ni)^2 + (ni)^3$

$\Rightarrow a + bi = (m^3 - 3mn^2) + (3m^2n - n^3)i$

Luego:

$a = m^3 - 3mn^2 \Rightarrow m^3 - a = 3mn^2$ ...(1)

$b = 3m^2n - n^3 \Rightarrow b + n^3 = 3m^2n$ ...(2)

Piden:

$$F = \sqrt{\frac{(m^3 - a)(b + n^3)}{m^3n^3}} \quad ...(3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\Rightarrow F = \sqrt{\frac{3mn^2 \cdot 3m^2n}{m^3n^3}} = \sqrt{\frac{9m^3n^3}{m^3n^3}}$$

$\therefore F = 3$

Clave E

17. $[(1 + i)^7 + (1 - i)^7]^n = 4096$

$$\left[\frac{(1 + i)^8}{1 + i} + \frac{(1 - i)^8}{1 - i}\right]^n = 2^{12}$$

Sabemos que:

$(1 + i)^8 = (1 - i)^8 = 16$

$$\left[\frac{16}{1 + i} + \frac{16}{1 - i}\right]^n = 2^{12}$$

$$\left[16 \times \frac{2}{1^2 + 1^2}\right]^n = 2^{12}$$

$$2^{4n} = 2^{12}$$

Luego: $4n = 12 \Rightarrow n = 3$

Clave E

18. Por dato:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120° + i\operatorname{sen}120°$$

$\Rightarrow z = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Piden:

$z^{-3} + z^3 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{-3} + \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^3$

$\Rightarrow z^3 + z^{-3} = e^{-2\pi i} + e^{2\pi i}$

$z^3 + z^{-3} = \cos(-2\pi) + i\operatorname{sen}(-2\pi) + \cos(2\pi) + i\operatorname{sen}(2\pi)$

$\therefore z^3 + z^{-3} = 2 = 2e^{2\pi i}$

Clave B

Resolución de problemas

19. Sea: $n = 4k$

$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + (4k)i^{(4k)} = 64 - 64i$

$(i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + ... = 64 - 64i$

$\underbrace{(2 - 2i) + (2 - 2i) + ...}_{k \text{ términos}} = 64 - 64i$

Entonces:

$(2 - 2i)k = 32(2 - 2i)$

$\Rightarrow k = 32$

$\therefore n = 4k = 4(32) = 128$

Clave B

20. Sea: $z = a + bi$

Por dato:

$$|z|^2 - 2iz + 2n(1 + i) = 0$$

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 - 2i(a + bi) + 2n(1 + i) = 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ai + 2b + 2n + 2ni = 0$$

$$\underbrace{a^2 + b^2 + 2b + 2n}_{0} + 2\underbrace{(n - a)}_{0}i = 0$$

Luego:

$n - a = 0 \Rightarrow n = a$

$a^2 + b^2 + 2b + 2n = 0$

$n^2 + b^2 + 2b + 2n = 0$

$b^2 + 2b + n^2 + 2n = 0$

Para que z sea único, b debe tomar un solo valor.

$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(n^2 + 2n)(1) = 0$

$4 = 4(n^2 + 2n)$

$\Rightarrow n^2 + 2n - 1 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2}$

$\Rightarrow n = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Como: $n \leq 0$

$\therefore\ n = -\sqrt{2} - 1$

Clave D

Nivel 3 (página 58) Unidad 2

Comunicación matemática

21.

(5 + i) + (3 + 3i) + (0 + 7i)	≡ 8 + 11i
(4 + i) + (9 + 3i) + (8 + 2i)	≡ 21 + 6i
(1 + 0i) + (8 + 9i) + i	≡ 9 + 10i
(0 + 6i) + (5 + 2i) + (9 + 0i)	≡ 14 + 8i
(3 + 6i) + (5 + 0i) + (1 + i)	≡ 9 + 7i
(2 + 3i) + (5 + 5i) + (3 + i)	≡ 10 + 9i
(7 + 3i) + (9 + i) + (7 + 0i)	≡ 23 + 4i
(7 + 4i) + (9 + 6i) + (8 + i)	≡ 24 + 11i

22. Sea: $z = a + bi$ un número complejo diferente de cero y cuya representación en forma polar es: $z = r\text{cis}\theta$.
A la expresión: $z = re^{i\theta}$ se le conoce como forma exponencial de z; si comparamos la forma polar con la forma exponencial de un número complejo se obtiene la siguiente relación: $e^{i\theta} = \text{cis}\theta$ o también: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$ a esta expresión se le conoce como fórmula de Euler.

Razonamiento y demostración

23. $([i^{1999} + i^{2000} + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003})^i]^{i^2})^{i^3}$

$([(i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}} + i^{\overset{\circ}{4}+1} + i^{\overset{\circ}{4}+2} + i^{\overset{\circ}{4}+3})^i]^{i^2})^{i^3}$

$(i^3 + 1 + i + i^2 + i^3)^{i^6}$

$(-i + 1 + i - 1 - i)^{-1}$

$(-i)^{-1} = \dfrac{1}{-i}$

$(-i)^{-1} = \dfrac{1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = i$

Clave B

24. $[(1+i)^{\frac{1}{n}} + 2(-2+2i)^{\frac{1}{3n}} + 3(-4)^{\frac{1}{4n}}]^{n^2} = -6^{16} . 4$

Sabemos que:

$(1 + i)^4 = -4$

$(1 + i)^3 = -2 + 2i$

Reemplazamos:

$\left\{(1+i)^{\frac{1}{n}} + 2\left[(1+i)^3\right]^{\frac{1}{3n}} + 3[(1+i)^4]^{\frac{1}{4n}}\right\}^{n^2} = -6^{16} . 4$

$\left\{6(1+i)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n^2} = -6^{16} . 4$

$\left\{6(1+i)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n^2} = 6^{16}(-4)$

$\left\{6(1+i)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n^2} = 6^{16}(1+i)^4$

$\left\{6(1+i)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n^2} = \left\{6(1+i)^{\frac{1}{4}}\right\}^{4^2} \quad \Rightarrow n = 4$

Clave C

25. $(1 + i)^{(1-i)^{n^n}} = -0{,}25$

Luego:

$(1 + i)^{(1-i)^{n^n}} = \dfrac{1}{-4} = \dfrac{1}{(1+i)^4} = (1+i)^{-4}$

Entonces: $(1 - i)^{n^n} = -4 = (1 - i)^4$

Comparando: $n^n = 4$

$n^n = 2^2$

$\therefore n = 2$

Clave D

26. $E = \dfrac{|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2}{\text{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})}$

$E = \dfrac{(z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}}{\text{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})}$

$E = \dfrac{(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{\text{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})}$

$E = \dfrac{2(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})}{\text{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2) + \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})}$ ...(1)

Sea:

$z_1 = a + bi \ \wedge\ z_2 = c + di$

$\Rightarrow z_1\overline{z_2} = ac + bd + (bc - ad)i$

$z_2\overline{z_1} = ac + bd + (da - cb)i$

Luego: $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2(ac + bd)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$E = \dfrac{4(ac + bd)}{(ac + bd) + (ac + bd)}$

$\therefore E = 2$

Clave C

27. Del enunciado:

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^n = \cos\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\forall\, k \in \mathbb{Z}$; luego:

$\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^n = e^{\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)i}$

$\Rightarrow \dfrac{\pi n}{6} = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$

$\Rightarrow n = 3(4k + 1)$

Por dato: $n = \overline{ab}$

$\Rightarrow\ 9 < n \leq 99$

$9 < 3(4k + 1) \leq 99$

$0{,}5 < k \leq 8 \Rightarrow k \in \{1; 2; 3; \ldots; 8\}$

Por lo tanto, n adopta 8 valores de 2 cifras.

Clave A

Resolución de problemas

28. Sabemos: $a_k = i^{k+1}$; $k \geq 0$

$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_n$

Luego:

$P(z) = iz^n + i^2z^{n-1} + i^3z^{n-2} + \ldots + i^{n+1}$ ...(I)

Sea $z = i$:

$P(i) = \underbrace{i^{n+1} + i^{n+1} + i^{n+1} + \ldots + i^{n+1}}_{(n+1)\text{ términos}}$

$P(i) = (n + 1)i^{n+1} = mi$ (dato)

Se observa que:

$n = \overset{\circ}{4}$

$m = \overset{\circ}{4} + 1$

Nos piden:

$P(i^{m+2}) = P\left(i^{\overset{\circ}{4}+3}\right) = P(i^3) = P(-i) = ?$

En (I): $z = -i$

$P(-i) = \underbrace{i(-i)^n + i^2(-i)^{n-1} + i^3(-i)^{n-2} + \ldots + i^{n+1}}_{\underbrace{(n+1)}_{\text{Número impar}}\text{ términos}}$

$P(-i) = \underbrace{i - i}_{0} + \underbrace{i - i}_{0} + \ldots + \underbrace{i - i}_{0} + i$

$P(i^{m+2}) = P(-i) = i$

Clave B

29. Del enunciado:

$\alpha = a + ni \quad \wedge \quad \beta = b - ni$

Sumando: $\alpha + \beta = a + b \in \mathbb{R}$

Luego:

$\alpha\beta = (a + ni)(b - ni)$

$\alpha\beta = (ab + n^2) + (bn - an)i$

Se cumple por dato:

$ab + n^2 = 0 \Rightarrow ab = -n^2$

$\Rightarrow$ ab es negativo

Nos piden:

$\dfrac{a^3 - b^3}{a^2b - ab^2} = \dfrac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{ab(a - b)}$

$= \dfrac{a^2 + b^2}{ab} + \dfrac{ab}{ab} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} + 1$

Sabemos que: $(a + b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab$

Dividiendo entre ab (ab < 0).

$\dfrac{a^2 + b^2}{ab} \leq -2$

Sumamos 1:

$\underbrace{\dfrac{a^2 + b^2}{ab} + 1}\leq -2 + 1$

$\dfrac{a^3 - b^3}{a^2b - ab^2} \leq -1$

Luego, el máximo valor será:

$\left(\dfrac{a^3 - b^3}{a^2b - ab^2}\right) = -1$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 60) Unidad 2

1. n.° términos de un CN: $\frac{n}{2} = m$

$\Rightarrow$ El CN es $\dfrac{(x^2)^{\frac{n}{2}} - y^m}{x^2 - y}$

$t_k = (x^2)^{\frac{n}{2} - k} \cdot y^{k-1} = x^{10}y^2$

$\Rightarrow k = 3 \wedge \frac{n}{2} - 3 = 10$

$\therefore \frac{n}{2} = m = 13$

Clave E

2. Si: (x + 2) es MCD, entonces es factor de ambos polinomios.

$\Rightarrow P(-2) = 0 \wedge M(-2) = 0$

Evaluamos:

$\left.\begin{array}{l} 4A + 3(-2) + B - 1 = 0 \\ 4A + 4(-2) - B - 1 = 0 \end{array}\right\}$ Igualando

$2B = -2$

$B = -1$

$\Rightarrow A = 2 \qquad \therefore A^B = \frac{1}{2}$

Clave D

3. Factorizamos los polinomios:

	1	a + 1	a	0
–1		–1	–a	0
	1	a	0	0

$M(x) = (x + 1)(x^2 + ax)$

$= (x + 1)(x + a)x$

$N(x) = x^2(x + 1)$

$\Rightarrow MCM = (x + 1)(x + a)x^2$

$\Rightarrow P(x) = \dfrac{(x+1)(x+a)x.x^2(x+1)}{(x+1)(x+a)x^2}$

$P(x) = x^2 + x$

Clave B

4. $\sqrt{7 - \underbrace{\sqrt{21 + 2\sqrt{20}}}_{\sqrt{20} + 1}}$

$= \sqrt{7 - \sqrt{20} - 1} = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$

$= \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$

Clave A

5. Piden: $(z)^{8k+4}$

$z = \cos 45° + i\,\text{sen}45°$

$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Entonces:

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8k+4}$

$= \left[\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{4k+2}$

Recuerda: $(1 + i)^2 = 2i$

$= \left(\dfrac{2i}{2}\right)^{4k+2} = (\underbrace{i)^{4k}}_{1} . i^2 = 1(-1) = -1$

Clave B

6. $z = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\Rightarrow |z| = 2;\ \arg(z) = 150°$

$\Rightarrow z^{12} = (2\text{cis}150°)^{12}$

$z^{12} = 2^{12}(\text{cis}12 \times 150°)$

$z^{12} = 2^{12}(\text{cis}(5 . 360°))$

$z^{12} = 2^{12}(1 + 0i)$

$z^{12} = 2^{12}$

Clave D

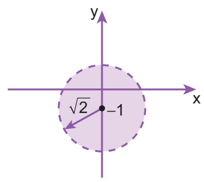
7. $z = x + yi$

$z + i = x + (y + 1)i$

$|z + i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < \sqrt{2}$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 + (y+1)^2} < \sqrt{2}^2$

Circunferencia de centro en (0; –1) y radio $\sqrt{2}$. Como no toma $\sqrt{2}$, punteamos la circunferencia.



Clave D

8. $H = (x - 1)x\dfrac{(x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + ... + 1) + x}{x^{n-1}}$

Usamos:

$H = \dfrac{(x-1)x\left(\frac{x^{n-1} - 1}{x - 1}\right) + x}{x^{n-1}}$

$H = \dfrac{x^n - x + x}{x^{n-1}} = x$

Clave C

9. Factorizamos las expresiones:

$x^4 + x^3 - x^2 - x = x^3(x + 1) - x(x + 1)$

$= x(x + 1)^2(x - 1)$

$5x^3 - 5x^2 + 2x - 2 = 5x^2(x - 1) + 2(x - 1)$

$= (x - 1)(5x^2 + 2)$

$2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 2x(x + 1) - 2(x + 1)$

$= (x + 1)(2x - 2)$

$= 2(x + 1)(x - 1)$

MCD: x – 1

Clave E

10. $t_{k+1} = C_k^5(\sqrt{x})^{5-k}(\sqrt[3]{x})^k$

Para eliminar los radicales, k = 3; k no puede ser 6 porque $5 - k \geq 0$.

$\Rightarrow t_{3+1} = C_3^5(\sqrt{x})^2(\sqrt[3]{x})^3$

$t_4 = 10x^2$

Clave B

11.

$x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 8x + 3$

$x^2 \qquad -2x \qquad -3 \qquad -4x^2$

$x^2 \qquad -2x \qquad -1 \qquad 4x^2$

$0x^2$

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 1)$

$x \qquad -3$

$x \qquad 1$

$\Rightarrow (x - 3)(x + 1)(x^2 - 2x - 1)$

Clave D

12. $\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + x - y}{x + y - x + y} = \dfrac{x - y + \sqrt{x^2 + y^2}}{2y}$

$\Rightarrow$ Denominador: 2y

Clave B

13. Por el teorema del resto:

En el divisor:

$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + 1 = 0$

$(x+1)^2 = -1$

En el dividendo:

$\Rightarrow D(x) = ((x + 1)^2)^{107}(x + 1) - 2x + 3$

$D(x) = -x - 1 - 2x + 3$

$D(x) = -3x + 2$

$\Rightarrow a = -3 \ \text{ y } \ b = 2$

$\therefore a - b = -5$

Clave C

Unidad 3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 63) Unidad 3

1. $3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[3]{x-1} = 5\sqrt[3]{x-1} - 5\sqrt[3]{x-1}$

$8\sqrt[3]{x-1} = 2\sqrt[3]{x+1}$

$\Rightarrow 4\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x+1}$

Elevando al cubo:

$64(x-1) = x+1$

$64x - 64 = x + 1 \Rightarrow 63x = 65$

$\therefore\ x = \frac{65}{63}$

Clave C

2. Desarrollando tenemos:

$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16$

$6x + 5 = 14x + 25$

$8x = -20$

$2x = -5$

$\therefore\ x = -\frac{5}{2}$

Clave E

3. $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6$

$2x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 6x + 15$

$2x^2 - 2x^2 + 6x + 6x = 15 - 5$

$12x = 10$

$\therefore\ x = \frac{5}{6}$

Clave B

4. $(x+4)^2 + 5 = (x-2)^2 + 30$

$x^2 + 8x + 16 + 5 = x^2 - 4x + 4 + 30$

$8x + 21 = 34 - 4x$

$8x + 4x = 34 - 21$

$12x = 13$

$\therefore\ x = \frac{13}{12}$

Clave A

5. $(x+3)(x-1) + (x+1)^2 = (2x+1)(x-2)$

$x^2 + 2x - 3 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + x - 2$

$2x^2 + 4x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$

$4x + 3x = 2 - 2$

$7x = 0$

$\therefore\ x = 0$

Clave D

6. Sea: D el n.° de días.

	1.ª persona	2.ª persona
Capital:	x	y
Ahorro por día:	a	b

Total de capitales:

$x + aD = n(y + bD)$

$x + aD = ny + nbD$

$aD - nbD = ny - x$

$D(a - nb) = ny - x$

$D = \frac{ny - x}{a - nb}$

$\therefore$ El tiempo es: $D = \frac{ny - x}{a - nb}$ días.

Clave B

7. $\frac{x-15}{2} + \frac{x-10}{3} + \frac{x-6}{5} = 20$

Homogenizando:

$\frac{15(x-15)}{30} + \frac{10(x-10)}{30} + \frac{6(x-6)}{30} = 20$

$15x - 225 + 10x - 100 + 6x - 36 = 600$

$31x - 361 = 600$

$31x = 961 \Rightarrow x = 31$

Clave E

8.

	Pasado	Presente
Antonio	2	x
Carlos	x	y
Luis		2

cte

Sabemos que:

$x - 2 = y - x = cte$

$y = 2x - 2$

Dato: $\frac{x}{y} = \frac{7}{13}$

Reemplazando:

$\frac{x}{2x-2} = \frac{7}{13} \Rightarrow 13x = 14x - 14$

$x = 14$

$\therefore$ La edad de Antonio es 14 años.

Clave A

9. Acierta: x Gana: 2 puntos

Desacierta: y Pierde: $\frac{1}{2}$ puntos

Del enunciado:

$x + y = 120$ ...(I)

$2x - \frac{y}{2} = 130$

$4x - y = 260$ ...(II)

Sumando (I) y (II):

$5x = 380$

$\therefore\ x = 76$

Clave A

10. $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{a+c} + \frac{x-c}{a+b} = 3$

Dato: $a = b = c = n$

Reemplazando:

$\frac{x-n}{n+n} + \frac{x-n}{n+n} + \frac{x-n}{n+n} = 3$

$3\left(\frac{x-n}{2n}\right) = 3$

$x - n = 2n \Rightarrow x = 3n$

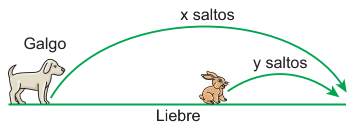
Nos piden:

$$\frac{(a+b-x)^2}{c} = \frac{(n+n-3n)^2}{n}$$

$$= \frac{(-n)^2}{n} = n = c$$

Clave E

11.



$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ...(I)

x saltos del galgo equivale a $\frac{7}{5}x$ saltos de la liebre.

Por dato:

$\frac{7}{5}x - y = 80$ ...(II)

Resolviendo (I) ∧ (II):

x = 1200 saltos

y = 1600 saltos

∴ El número de saltos de la liebre es de 1600.

Clave A

12. Del enunciado:

$$\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x}$$
$$8\sqrt{x} = 2\sqrt{x+1}$$
$$4\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$$
$$(4\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x+1})^2$$
$$16x = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

Nos piden:

$$\sqrt{x^{-1}+1} = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4$$

Clave A

13. $\frac{a^2-ax}{b} - \frac{b^2+bx}{a} = x$

$$a^3 - a^2x - b^3 - b^2x = abx$$
$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)x$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a^2+ab+b^2)x$$
$$\therefore x = a - b$$

Clave B

14. $\frac{1}{a}\left(\frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{c}\right) = \frac{x-c}{bc}$

$$xc - ac - bx + b^2 = xa - ca$$
$$x(c - b - a) = -b^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{-b^2}{c-b-a}$$
$$\therefore x = \frac{b^2}{a+b-c}$$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 65) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

A) Para evitar que se introduzcan soluciones extrañas; a las soluciones encontradas deben comprobarse en la ecuación original y tomar como soluciones correctas a aquellos que verifiquen la ecuación.

B) Para evitar que se pierdan soluciones; el factor simplificado se iguala a cero.

C) Para evitar que se introduzcan soluciones extrañas; la expresión que se multiplica se hace diferente de cero.

2.

Clave E

Razonamiento y demostración

3. $\frac{x-4}{5} + \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{2} = \frac{1}{10}$

$$20\left(\frac{x-4}{5} + \frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{2}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)20$$
$$4(x-4) + 5\,.\,(x+2) + 10(x-3) = 2$$
$$4x - 16 + 5x + 10 + 10x - 30 = 2$$
$$4x + 5x + 10x - 16 + 10 - 30 = 2$$
$$19x - 36 = 2$$
$$19x = 38$$
$$x = 2$$

Clave A

4. $\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = a$

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = a\sqrt{x+a} - a\sqrt{x-a}$$
$$(a+1)\sqrt{x-a} = (a-1)\sqrt{x+a}$$
$$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right)^2 = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$
$$\frac{x-a}{x+a} = \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$$
$$x(a+1)^2 - a(a+1)^2 = x(a-1)^2 + a(a-1)^2$$
$$x[(a+1)^2 - (a-1)^2] = a[(a-1)^2 + (a+1)^2]$$
$$x = \frac{a[(a-1)^2+(a+1)^2]}{(a+1)^2-(a-1)^2}$$
$$x = \frac{a(2a^2+2)}{4a}$$
$$x = \frac{a^2+1}{2}$$

Clave C

5. $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{6}$

$$\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} - \frac{x-5}{6}\right)12 = \left(\frac{x-4}{5}\right)12$$
$$6(x-1) + 4(x-2) + 3(x-3) - 2(x-5) = \frac{12}{5}(x-4)$$
$$6x - 6 + 4x - 8 + 3x - 9 - 2x + 10 = \frac{12}{5}(x-4)$$
$$11x - 6 - 8 - 9 + 10 = \frac{12}{5}(x-4)$$
$$5(11x - 13) = 12(x - 4)$$
$$55x - 65 = 12x - 48$$
$$43x = 17$$
$$x = \frac{17}{43}$$

Clave E

6. $\frac{2x-1}{6} + \frac{2x+1}{4} = \frac{x-1}{3} + \frac{x+1}{5}$

$$60\left(\frac{2x-1}{6} + \frac{2x+1}{4}\right) = 60\left(\frac{x-1}{3} + \frac{x+1}{5}\right)$$
$$10(2x-1) + 15(2x+1) = 20(x-1) + 12(x+1)$$
$$20x - 10 + 30x + 15 = 20x - 20 + 12x + 12$$
$$50x + 5 = 32x - 8$$
$$50x - 32x = -8 - 5$$
$$18x = -13$$
$$x = -\frac{13}{18}$$

Clave A

7. $\frac{px}{qb} - \frac{qx}{pb} + \frac{px}{qa} - \frac{qx}{pa} = \frac{p}{q} - \frac{q}{p}$

$$\frac{x}{b}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) + \frac{x}{a}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)$$
$$x\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 1$$
$$\frac{x(a+b)}{ab} = 1$$

Luego:

$$\frac{ab}{x} = a + b = n + n + 1 = \underbrace{2n+1}_{\text{impar}}$$

Clave B

8. Del enunciado:

$$\frac{x+1}{x+a+b} = 1 - \frac{a-b+1}{x+a-b}$$
$$\frac{x+1}{x+a+b} = \frac{x+a-b-a+b-1}{x+a-b}$$
$$\frac{x+1}{x+a+b} = \frac{x-1}{x+a-b}$$
$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+a+b}{x+a-b}$$

Aplicando proporciones:

$$\frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{x+a+b-(x+a-b)}{x+a-b}$$
$$\frac{2}{x-1} = \frac{2b}{x+a-b}$$
$$x + a - b = xb - b$$
$$a = x(b-1)$$
$$\therefore x = \frac{a}{b-1}$$

Clave C

Resolución de problemas

9.

	Pantalón	Camisa	Zapatos
Precio:	3x	x	3x + 50

Gasto total: 3x + x + 3x + 50 = 400

7x = 350

x = 50

$\therefore$ Los zapatos cuestan:
$3x + 50 = 3(50) + 50 = S/.200$

Clave B

10. Pasado   Presente   Futuro

$x - 10$ $x - 5$ x

hace 5 años   luego de 5 años

$\therefore$ El doble de su edad hace 5 años fue:
$2(x - 10)$

Clave C

Nivel 2 (página 65) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

Clave D

12.

I. $\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{a+b} = \dfrac{1}{a+b}$

$\dfrac{ax + bx - ax}{a(a+b)} = \dfrac{1}{a+b}$

$\dfrac{bx}{a} = 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{a}{b}$

II. $\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{x-a}{x}\right) + \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{x-b}{x}\right) = 1$

$\dfrac{a^2(x-a) + b^2(x-b)}{abx} = 1$

$a^2x - a^3 + b^2x - b^3 = abx$

$(a^2 + b^2 - ab)x = a^3 + b^3$

$x = \dfrac{(a+b)\cancel{(a^2 - ab + b^2)}}{\cancel{a^2 + b^2 - ab}}$

$\Rightarrow x = a + b$

III. $\dfrac{(a^2 - ab)x}{a^2 - ab + b^2} - \dfrac{ab^3 + a^2b^2}{a^3 + b^3} = x$

$\dfrac{(a^2 - ab)x}{a^2 - ab + b^2} - x = \dfrac{ab^2(b+a)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

$-b^2x = ab^2$

$\Rightarrow x = -a$

IV. $(a-b)^2 + \dfrac{ab(a+b)}{x} = \dfrac{a^3 + b^3}{a+b}$

$\dfrac{ab(a+b)}{x} = \dfrac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a+b} - (a^2 + b^2 - 2ab)$

$\dfrac{ab(a+b)}{x} = a^2 - ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab$

$\Rightarrow x = a + b$

V. $(x+a)(x-b) - (x+b)(x-2a) = b(a-2) + 3a$

$x^2 + (a-b)x - ab - x^2 - (b-2a)x + 2ab = ba - 2b + 3a$

$(a - b - b + 2a)x = 3a - 2b$

$(3a - 2b)x = 3a - 2b$

$\Rightarrow x = 1$

Clave C

Razonamiento y demostración

13. $\dfrac{\sqrt{5px + p} + \sqrt{6px}}{\sqrt{5px + p} - \sqrt{6px}} = 4$

$\sqrt{5px + p} + \sqrt{6px} = 4\sqrt{5px + p} - 4\sqrt{6px}$

$5\sqrt{6px} = 3\sqrt{5px + p}$

$\left(\dfrac{\sqrt{5px + p}}{\sqrt{6px}}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

$\dfrac{p(5x+1)}{6px} = \dfrac{25}{9}$

$\dfrac{5x+1}{6x} = \dfrac{25}{9}$

$5x + 1 = \dfrac{50}{3}x$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{35}$

Clave D

14. $\dfrac{a^2 + x}{b^2 - x} - \dfrac{a^2 - x}{b^2 + x} = \dfrac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}$

$(a^2 + x)(b^2 + x)) - (a^2 - x)(b^2 - x) = 4abx + 2a^2 - 2b^2$

$a^2b^2 + xa^2 + xb^2 + x^2 - a^2b^2 + a^2x + xb^2 - x^2 = 4abx + 2a^2 - 2b^2$

$2xa^2 + 2xb^2 = 4abx + 2a^2 - 2b^2$

$(2a^2 + 2b^2 - 4ab)x = 2a^2 - 2b^2$

$x = \dfrac{2(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2 - 2ab)}$

$x = \dfrac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$

$x = \dfrac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}$

$\therefore \quad x = \dfrac{a+b}{a-b}$

Clave C

15. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ ...(1)

De (1):
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$ ...(2)
$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ...(3)

Elevando al cuadrado (1):

$x + 1 - 2\sqrt{x^2 - 1} + x - 1 = 1$

$2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - 1}$

Elevando al cuadrado:

$4x^2 - 4x + 1 = 4(x^2 - 1)$

$-4x + 1 = -4$

$5 = 4x$

$\Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$

Luego, x = 5/4 cumple con las restricciones (2) y (3).
Por lo tanto, la ecuación es compatible determinada.

Clave E

16. Restando uno a cada término del enunciado:

$\dfrac{a+x}{1+a+ab} - 1 + \dfrac{b+x}{1+b+ab} - 1$

$= \dfrac{x-a}{1-a+ab} - 1 + \dfrac{x-b}{1-b+ab} - 1$

Luego, agrupando términos:

$(x - 1 - ab)\underbrace{\left(\dfrac{1}{1+a+ab} + \dfrac{1}{1+b+ab} - \dfrac{1}{1-a+ab} - \dfrac{1}{1-b+ab}\right)}_{\neq 0} = 0$

Entonces:
$x - 1 - ab = 0$
$\therefore x = ab + 1$

Clave B

17. $\dfrac{x - 33}{7^2} + \dfrac{x}{33^2} = \dfrac{7^2 + 33x}{33^2 \cdot 7}$

$33^2x - 33^3 + 7^2x = (7^2 + 33x)7$

$x(33^2 + 7^2) = 7^3 + 33 \,.\, 7x + 33^3$

$x(33^2 - 33 \,.\, 7 + 7^2) = 7^3 + 33^3$

Pero, sabemos que:
$7^3 + 33^3 = (7 + 33)(7^2 - 33 \,.\, 7 + 33^2)$
$\Rightarrow x = 7 + 33$
$\therefore x = 40$

Clave E

18. $nx + (1 + 2 + 3 + ... + n) = n^2$

$nx + \dfrac{n(n+1)}{2} = n^2$

$x + \dfrac{n+1}{2} = n$

Entonces:

$x = n - \left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{2n - n - 1}{2}$

$\therefore x = \dfrac{n-1}{2}$

Clave E

19. $\sqrt{5-x} \Rightarrow 5 - x \geq 0$

$5 \geq x$ ...(1)

Del enunciado:

$2x + 2\sqrt{5-x} = 12 + \sqrt{20 - 4x}$

$\Rightarrow 2x - 12 = 2\sqrt{5-x} - 2\sqrt{5-x}$

$2x = 12$

$x = 6$ ...(2)

De (1) y (2), se deduce que la ecuación es incompatible.

Clave E

Resolución de problemas

20. Alumnos = 20

Cantidad de regalos = $20 \times 2 = 40$
Sea: x la cantidad de regalos perdidos.

Del enunciado:
quedó   perdió
$40 - x$ x

Luego:

$x = (40 - x) + 2$

$x = 42 - x$

$2x = 42 \Rightarrow x = 21$

$\therefore$ se perdieron 21 regalos

Clave D

21. Pasado — Presente — Futuro

$x - 10$ — x — $x + 15$

hace 10 años — dentro de 15 años

Del enunciado:

$$2(x - 10) + 3(x + 15) = 110$$
$$2x - 20 + 3x + 45 = 110$$
$$5x + 25 = 110$$
$$5x = 85$$
$$\Rightarrow x = 17$$

$\therefore$ Juan tiene 17 años.

Clave C

Nivel 3 (página 66) Unidad 3

Comunicación matemática

22. Según el enunciado:

Pretendiente

	Pretendiente	Queda
1.°	$\frac{M+2}{2}$	$M - \frac{M+2}{2} = \frac{M-2}{2}$
2.°	$\frac{1}{2}\left(\frac{M-2}{2}\right) + 1 = \frac{M+2}{4}$	$\frac{M-2}{2} - \frac{M+2}{4} = \frac{M-6}{4}$
3.°	$\frac{1}{2}\left(\frac{M-6}{4}\right) + 3 = \frac{M+18}{8}$	

- $M = \frac{M+2}{2} = \frac{M+2}{4} + \frac{M+18}{8} \Rightarrow$ I (F)
- Resolviendo: $M = 30 \Rightarrow$ II (V)
- Pretendiente

$$\left.\begin{aligned} 1.° &= \frac{M+2}{2} = 16 \\ 2.° &= \frac{M+2}{4} = 8 \\ 3.° &= \frac{M+18}{8} = 6 \end{aligned}\right\} + \ 22 \Rightarrow \quad \text{III (F)}$$

- 2.° pretendiente $= 8 \Rightarrow$ IV (V)

23.

$x + 5 + \boxed{2x+3} + \boxed{5x} = 16;\ x = 1$

$x + 4 + \boxed{4x-9} + \boxed{x+5} = 18;\ x = 3$

$\boxed{2} + \boxed{5x+7} + x = 51;\ x = 7$

$\boxed{5x} + 2x + 5 + \boxed{6} = 81;\ x = 10$

$\boxed{3x+1} + 5 + \boxed{x-1} = 41;\ x = 9$

$\boxed{10x-1} + \boxed{4x-5} + x + 3 = 12;\ x = 1$

$\boxed{2x+3} + \boxed{x-9} + 7 = 22;\ x = 7$

$\boxed{3x+6} + 6x + 9 + \boxed{x+9} = 54;\ x = 3$

Razonamiento y demostración

24. $x - 4 = \sqrt{x^2 - 8}$

De (1):

$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ ...(2)

$x^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 8$ ...(3)

Elevando al cuadrado (1):

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8$$
$$24 = 8x$$
$$x = 3 \quad ...(4)$$

$\therefore$ Luego, se observa de (2) y (4) que la ecuación es incompatible.

Clave A

25. $\frac{mx-a}{b+c} + \frac{mx-b}{c+a} + \frac{mx-c}{a+b} = 3$

$$\frac{mx-a}{b+c} - 1 + \frac{mx-b}{c+a} - 1 + \frac{mx-c}{a+b} - 1 = 0$$

Efectuando y factorizando en cada término:

$$(mx - a - b - c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$$

Por dato: $a > 0$; $b > 0$ y $c > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \neq 0$$

$$\Rightarrow mx - a - b - c = 0 \Rightarrow x = \frac{a+b+c}{m}$$

Además: $m = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$

$$\Rightarrow x = \frac{a+b+c}{\frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc}}$$

$$\therefore x = \frac{a+b+c}{\frac{a+b+c}{abc}} = abc$$

Clave C

26. $mx + (3 - n)x = 5x + 2m - 10 + n$

$$mx + (3 - n)x - 5x = 2m + n - 10$$
$$x(m - n - 2) = 2m + n - 10$$
$$x = \frac{2m + n - 10}{m - n - 2}$$

Dato: infinitas soluciones:

$\Rightarrow 2m + n - 10 = 0 \Rightarrow 2m + n = 10$ ...(1)

$m - n - 2 = 0 \Rightarrow m - n = 2$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$3m = 12 \Rightarrow m = 4$

$4 - n = 2 \Rightarrow n = 2$

Nos piden: $mn = 4(2) = 8$

Clave A

27. $\left(\frac{a+b+c}{x-d}\right)^{-1} + \left(\frac{b+c+d}{x-a}\right)^{-1} + \left(\frac{c+d+a}{x-b}\right)^{-1} + \left(\frac{d+a+b}{x-c}\right)^{-1} = 4$

Dando forma:

$$\frac{x-d}{a+b+c} - 1 + \frac{x-a}{b+c+d} - 1 + \frac{x-b}{c+d+a} - 1 + \frac{x-c}{d+a+b} - 1 = 0$$

$$\frac{x-a-b-c-d}{a+b+c} + \frac{x-a-b-c-d}{b+d+c}$$
$$+ \frac{x-a-b-c-d}{c+d+a} + \frac{x-a-b-c-d}{d+a+b} = 0$$

Factorizando:

$$\underbrace{(x-a-b-c-d)}_{=0}\times\underbrace{\left\{\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+d+c}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}\right\}}_{\neq 0}=0$$

$\Rightarrow x-a-b-c-d=0$

$\therefore\ x=a+b+c+d$

Clave A

28. $\dfrac{(a+x)(a-b)}{a+b}+\dfrac{(a-x)(a+b)}{a-b}=\dfrac{(x-a)(a^2-6ab+b^2)}{a^2-b^2}$

Multiplicando:

$$\frac{(x+a)(a-b)^2+(a-x)(a+b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(x-a)(a^2-6ab+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$a(a-b)^2+x(a-b)^2+a(a+b)^2-x(a+b)^2=(x-a)(a^2-6ab+b^2)$$

$$a[(a+b)^2+(a-b)^2]-x[(a+b)^2+(a+b)^2]=(x-a)(a^2-6ab+b^2)$$

$$2a(a^2+b^2)-4abx=x(a^2-6ab+b^2)-a(a^2-6ab+b^2)$$

$$a[2a^2+2b^2+a^2-6ab+b^2)=x(a^2-6ab+b^2+4ab)$$

$$3a(a^2-2ab+b^2)=x(a^2-2ab+b^2)$$

$$\therefore\ x=3a$$

Clave B

29. $\dfrac{\sqrt[n]{x+a}+\sqrt[n]{x-a}}{\sqrt[n]{x+a}-\sqrt[n]{x-a}}=\dfrac{a+1}{a-1}$

Aplicamos proporciones:

$$\frac{2\sqrt[n]{x+a}}{2\sqrt[n]{x-a}}=\frac{2a}{2}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x+a}}{\sqrt[n]{x-a}}=a$$

Elevamos a la **n**:

$$\frac{x+a}{x-a}=a^n$$

Aplicamos proporciones:

$$\frac{2x}{2a}=\frac{a^n+1}{a^n-1}\Rightarrow x=\frac{a(a^n+1)}{a^n-1}$$

Clave B

30. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}$

Restando 1:

$$\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x+4}{x-4}-1=\frac{x+2}{x-2}-1+\frac{x+3}{x-3}-1$$

Reduciendo:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{8}{x-4}=\frac{4}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-4}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

$$\frac{x-4+4x-4}{(x-1)(x-4)}=\frac{2x-6+3x-6}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{5x-8}{x^2-5x+4}=\frac{5x-12}{x^2-5x+6}$$

Dando forma:

$$\frac{5x-8}{5x-12}=\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$$

Por proporciones:

$$\frac{4}{5x-12}=\frac{-2}{x^2-5x+6}$$

$2x^2-10x+12=-5x+12$

$2x^2-5x=0$

$x(2x-5)=0$

$x=0\ \vee\ x=2{,}5$

$\therefore$ El menor valor es cero.

Clave D

Resolución de problemas

31.

Retira	Queda
$\dfrac{n}{3}$	$\dfrac{2n}{3}$

Luego:

Agrega	Queda
m	$\dfrac{2n}{3}+m$

Finalmente:

Retira	Queda
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n}{3}+m\right)$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n}{3}+m\right)$

Quedan: $\dfrac{2n+3m}{6}$

Clave A

32.

	Tiene	Tendrá
Madre	36	36 + x
Hija	8	8 + x

M = 3H

$36+x=3(8+x)$

$36+x=24+3x$

$12=2x$

$\therefore\ x=6$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 68) Unidad 3

1. Primero hallamos AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 7+2 & 8+0 \\ 28+5 & 32+0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 33 & 32 \end{pmatrix}$$

Piden: traz(AB) = 9 + 32 = 41

Clave C

2. Hallamos el determinante aplicando la regla de Sarrus.

$$A = \left|\begin{matrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & -5 \\ 3 & 3 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$

$$|A| = (4)(3)(2) + (-5)(1)(-3) + (2)(3)(4) - (-3)(3)(2) - (4)(1)(4) - (2)(3)(-5)$$

$$|A| = 24 + 15 + 24 + 18 - 16 + 30$$

$\therefore\ |A| = 95$

Clave A

3. Sabemos que: $J^{-1} = \dfrac{Adj(J)}{|J|}$

Hallando la matriz adjunta de J:

$$J_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$J_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

$$J_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 35 = -26$$

$$J_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(21-1) = -20$$

$$J_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 7 = -4$$

$$J_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(1-49) = 48$$

$$J_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 5 = 9$$

$$J_{23} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-9) = 7$$

$$J_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (5-63) = -58$$

$$\Rightarrow cofac(J) = \begin{pmatrix} 13 & -26 & 9 \\ -13 & -4 & 7 \\ -26 & 48 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Adj(J) = \begin{pmatrix} 13 & -13 & -26 \\ -20 & -4 & 48 \\ 9 & 7 & -58 \end{pmatrix}$$

$$|J| = \left|\begin{matrix} 1 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$|J| = 15 + 9 + 98 - [(35) + 2 + 189]$

$|J| = 122 - 226$

$|J| = -104$

Luego:

$$J^{-1} = \frac{1}{-104}\begin{pmatrix} 13 & -13 & -26 \\ -20 & -4 & 48 \\ 9 & 7 & -58 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ J^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 5/26 & 1/26 & -6/13 \\ -9/104 & -7/104 & 29/52 \end{pmatrix}$$

Clave C

4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Luego:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^3 - 2C = \begin{pmatrix} 19 & 27 \\ 18 & 19 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C^3 - 2C = \begin{pmatrix} 17 & 21 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$$

Clave B

5. Piden:

$N = (A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$N = A^2 - B^2 - AB + BA$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Clave A

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1}(1) = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(5) = -5$

$A_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Adj(A) = B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Clave B

7. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Para hallar la matriz de cofactores aplicamos el mismo procedimiento utilizado en el problema 1; sin embargo, como piden la suma de su diagonal principal, entonces solo calculamos: B_{11}; B_{22}; B_{33}.

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$\therefore B_{11} + B_{22} + B_{33} = -18$

Clave A

8. $|A| = 1 \times 3 \times 5 \times 3 \times a$

$\therefore\ |A| = 45a$

Clave B

9. De la ecuación:

Dato:

$$|xI - A| = \underbrace{x^3 - 6x^2 + 3x + 2}_{\text{Polinomio característico de A}}$$

Luego: $A^3 - 6A^2 + 3A + 2I = 0$

	1	−6	3	2
A = 1	↓	1	−5	−2
	1	−5	−2	0

$A = I_3 \Rightarrow A^{-1} = I_3$

Nos piden el término lineal de:

$P(\lambda) = |\lambda I - A^{-1}|$

$P(\lambda) = |\lambda I_3 - I_3| = |(\lambda - 1)I_3|$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$P(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$\therefore$ El término lineal es: 3λ

Clave C

10. Por dato:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{A} = 8$$

Piden: $R = 6\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} - 9|A^t|$

Por propiedad: $|A| = |A^t|$

$$\Rightarrow R = -6\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{A} - 9|A| = -15|A|$$

$\therefore R = -15(8) = -120$

Clave D

11. Por dato:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

Piden:

$$3A-12I=3\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}-12\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$3A-12I=\begin{bmatrix}12 & 15\\ 9 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 3A-12I=\begin{bmatrix}0 & 15\\ 9 & -6\end{bmatrix}$$

Clave B

12. Por dato:

$$X=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma$ elementos de $X = 6 = 2\,.\,3^1$

$$X^2=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 5 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma$ elementos de $X^2 = 18 = 2\,.\,3^2$

$$X^3=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27 & 0\\ 19 & 8\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma$ elementos de $X^3 = 54 = 2\,.\,3^3$

En general:

$\therefore\ \Sigma$ elementos de $X^n = 2\,.\,3^n$

Clave B

13.

$$E=\begin{vmatrix}1 & 8 & 2 & 4\\ 1 & 27 & 3 & 9\\ 1 & 125 & 5 & 25\\ 1 & 343 & 7 & 49\end{vmatrix}$$

$$E=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 8 & 4\\ 1 & 3 & 27 & 9\\ 1 & 5 & 125 & 25\\ 1 & 7 & 343 & 49\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 5 & 25 & 125\\ 1 & 7 & 49 & 343\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow E=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2^2 & 2^3\\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3\\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3\\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3\end{vmatrix}$$

Por ser una determinante de Vandermonde:

$E=(-1)^4(3-2)(5-2)(5-3)(7-2)(7-3)(7-5)$

$\Rightarrow E=1\,.\,3\,.\,2\,.\,5\,.\,4\,.\,2$

$\therefore\ E=240$

Clave D

14. Analizando la 1.ª columna, por menores complementarios:

$$|A|=a\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ & & & & b\\ 0 & 0 & 0 & & a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a & b & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow |A|=a\,.\,a^{n-1}+(-1)^{n+1}b\,.\,b^{n-1}$

$\therefore\ |A|=a^n+(-1)^{n+1}b^n$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 70) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Como:

$$a_{ij}=\begin{cases}i-j\ ;\ i<j\\ i\times j\ ;\ i=j\\ i+j\ ;\ i>j\end{cases}$$

Además: $A=(a_{ij})_{3\times 2}$

Entonces:

$$A=\begin{bmatrix}1\times 1 & 1-2\\ 2+1 & 2\times 2\\ 3+1 & 3+2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^t=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^t=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 25 & 32\\ -1 & 32 & 41\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \text{traz}(AA^t)=68$

Clave E

2.

<table>
<tr><td>A</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>N</td><td>T</td><td>P</td><td>J</td><td>D</td><td>A</td><td>D</td><td>E</td><td>Y</td><td>T</td><td>F</td></tr>
<tr><td>X</td><td>O</td><td>W</td><td>U</td><td>T</td><td>I</td><td>N</td><td>V</td><td>O</td><td>L</td><td>U</td><td>T</td><td>I</td><td>V</td><td>A</td></tr>
<tr><td>A</td><td>T</td><td>N</td><td>I</td><td>L</td><td>P</td><td>O</td><td>T</td><td>E</td><td>X</td><td>H</td><td>N</td><td>J</td><td>K</td><td>N</td></tr>
<tr><td>C</td><td>P</td><td>X</td><td>S</td><td>A</td><td>B</td><td>W</td><td>E</td><td>S</td><td>M</td><td>R</td><td>E</td><td>W</td><td>M</td><td>X</td></tr>
<tr><td>I</td><td>A</td><td>C</td><td>I</td><td>R</td><td>T</td><td>E</td><td>M</td><td>I</td><td>S</td><td>I</td><td>T</td><td>N</td><td>A</td><td>S</td></tr>
<tr><td>R</td><td>W</td><td>U</td><td>D</td><td>O</td><td>Z</td><td>S</td><td>T</td><td>S</td><td>Q</td><td>Y</td><td>O</td><td>I</td><td>T</td><td>I</td></tr>
<tr><td>T</td><td>P</td><td>W</td><td>E</td><td>I</td><td>D</td><td>E</td><td>E</td><td>N</td><td>T</td><td>I</td><td>P</td><td>N</td><td>R</td><td>M</td></tr>
<tr><td>E</td><td>A</td><td>T</td><td>N</td><td>U</td><td>J</td><td>D</td><td>A</td><td>U</td><td>Y</td><td>R</td><td>L</td><td>V</td><td>I</td><td>E</td></tr>
<tr><td>M</td><td>F</td><td>V</td><td>T</td><td>D</td><td>Z</td><td>L</td><td>R</td><td>S</td><td>P</td><td>H</td><td>I</td><td>O</td><td>Z</td><td>K</td></tr>
<tr><td>I</td><td>H</td><td>M</td><td>I</td><td>Q</td><td>E</td><td>M</td><td>Z</td><td>D</td><td>R</td><td>S</td><td>N</td><td>L</td><td>X</td><td>N</td></tr>
<tr><td>S</td><td>C</td><td>N</td><td>D</td><td>K</td><td>I</td><td>A</td><td>G</td><td>L</td><td>N</td><td>E</td><td>N</td><td>U</td><td>H</td><td>T</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Z</td><td>W</td><td>A</td><td>J</td><td>G</td><td>T</td><td>K</td><td>X</td><td>O</td><td>Z</td><td>V</td><td>A</td><td>G</td><td>R</td></tr>
<tr><td>J</td><td>P</td><td>B</td><td>D</td><td>Y</td><td>L</td><td>R</td><td>I</td><td>N</td><td>V</td><td>O</td><td>L</td><td>N</td><td>R</td><td>I</td></tr>
<tr><td>Z</td><td>A</td><td>S</td><td>I</td><td>M</td><td>E</td><td>W</td><td>T</td><td>R</td><td>Q</td><td>I</td><td>C</td><td>A</td><td>I</td><td>T</td></tr>
<tr><td>I</td><td>E</td><td>T</td><td>N</td><td>E</td><td>T</td><td>O</td><td>P</td><td>M</td><td>E</td><td>D</td><td>I</td><td>F</td><td>U</td><td>A</td></tr>
</table>

Razonamiento y demostración

3. $C^2=C.C=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$C^2=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Luego:

$$C^3=C^2\,.\,C=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C^3=\begin{bmatrix}16 & 12\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

Piden:

$$C^3 - 6C = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C^3 - 6C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I$$

Clave E

4. Por dato:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad ...(1)$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad ...(2)$$

De (1) y (2) se deduce:

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Clave C

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 + 1 + 1 + 2 = 6 \times 3^0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 5 + 4 + 4 + 5 = 18 = 6 \longleftarrow 3^1$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 14 + 13 + 13 + 14 = 54 = 6 \longleftarrow 3^2$

$\therefore$ La suma de los elementos de A^n es:

$$6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$$

Clave B

6. Del enunciado:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times4} ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$C = A\,.\,B = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 37 & 32 \\ 39 & 32 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$c_{32} = 32$; $c_{11} = 36$

$c_{22} = 32$; $c_{31} = 39$

Piden:

$$N = \frac{c_{32} - c_{11}}{c_{22} - c_{31}} = \frac{32 - 36}{32 - 39}$$

$$\therefore N = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Clave A

7. $S = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}}$

Por la regla de Sarrus:

$$S = \sqrt{a^6 + a^3b^3 + b^6 - (a^3b^3 + a^3b^3 + a^3b^3)}$$

$$S = \sqrt{a^6 + b^6 - 2a^3b^3} = \sqrt{(a^3 - b^3)^2}$$

$$\therefore S = |a^3 - b^3|$$

Clave D

8. $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

Desarrollando:

$$x^3 + x + x - (x^3 + 1 + x^2) = x^3 + 1 + x^2 - (x^3 + x + x)$$

Luego:

$$2x - 1 - x^2 = 1 + x^2 - 2x$$

$$0 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$0 = 2(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

Clave D

Resolución de problemas

9. De la matriz identidad: $AB = I$

Multiplicando por la inversa de A:

$$A^{-1}AB = A^{-1}I$$

$$IB = A^{-1}$$

$$B = A^{-1}$$

Donde:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

De la igualdad de matrices:

$a = 3/2$; $b = -1/2$; $c = -1/2$; $d = 1/2$

Nos piden:

$a + b + c + d = 1$

Clave D

10. $A^2 = A\,.\,A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 35 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

Suma elemento diag. $(A^2) = \text{SED}(A^2)$

$\text{SED}(A^2) = 1 + 2^2 + 3^2$

$$A^3 = A^2\,.\,A = \begin{bmatrix} 1 & 35 & 223 \\ 0 & 2^3 & 133 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

$\text{SED}(A^3) = 1 + 2^3 + 3^3$

$\Rightarrow \text{SED}(A^{10}) = 1 + 2^{10} + 3^{10} = 60\,074$

Clave D

Nivel 2 (página 71) Unidad 3

Comunicación matemática

11. Datos:

$A = [a_{ij}]_{3\times3}$

$$a_{ij} = \begin{cases} (i + j)x; \text{ si: } i + j < 4 \\ i + xj; \text{ si: } i + j \geq 4 \end{cases} \qquad ...(I)$$

$|A| = 0$

Sabemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Luego de (I):

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 3x & 1 + 3x \\ 3x & 2 + 2x & 2 + 3x \\ 3 + x & 3 + 2x & 3 + 3x \end{pmatrix}$$

Restamos $C_3 - C_2$ y $C_2 - C_1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & x & 1 \\ 3x & 2 - x & x \\ x + 3 & x & x \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2x[(2 - x)x - x^2] - x[3x^2 - x(x + 3)] + 1[3x^2 - (2 - x)(x + 3)] = 0$$

$$2x[2x - 2x^2] - x[2x^2 - 3x] + 1[4x^2 + x - 6] = 0$$

Reduciendo se tiene:

$6x^3 - 11x^2 - x + 6 = 0$

Nos piden:

Producto de raíces $= -\frac{6}{6} = -1$

Clave A

12. Recordar que si A es una matriz simétrica, se cumple que:

$$A = A^T$$

I. Falso (F)

Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica:

Veamos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Se nota que $A^2 = (A^2)^T$, pero A no es simétrica.

II. Verdadero (V)

Si: A + B y B son simétricas, entonces A es simétrica.

Sabemos:

$A + B = (A + B)^T$ y $B = B^T$

$A + B = A^T + \underbrace{B^T}$

$A + B = A^T + B$

$A = A^T$

A es simétrica

III. Falso (F)
Si A y B son matrices del mismo orden, ambas simétricas, entonces AB es simétrica.

Debes verificar que: $AB = (AB)^T$ (1°)
Según el enunciado: $A = A^T$ y $B = B^T$

Si suponemos que $AB = (AB)^T$ sea verdadero:
Entonces:

$AB = (AB)^T$

$AB = B^TA^T$

$AB = BA$

Esto no siempre se cumple, ya que el producto de matrices no siempre cumple la propiedad conmutativa.
Luego; lo supuesto es falso.

Clave C

Razonamiento y demostración

13. Sea:

$$X = \begin{bmatrix} m & n & p \\ q & r & s \end{bmatrix}$$

Del enunciado:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n & p \\ q & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} am & an & ap \\ bq & br & bs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

Del dato:

$a^2 + b^2 + 2 = 2(a + b)$

$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 = 0$

$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow a = 1 \ \wedge \ b = 1 \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m & n & p \\ q & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Sigma$ elementos de X es: 8

Clave C

14.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 97 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 98 \end{vmatrix}$$

Restando a todas las filas la primera fila:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 97 \end{vmatrix}$$

Por propiedad:

$\Rightarrow A = 1 . 1 . 2 . 3 . 4 .... 96 . 97$

$\therefore A = 97!$

Clave B

15. $|A| . |A^t + I|$

$A = [a_{ij}]_{n \times n} \,/\, a_{23} = 1$

$\Rightarrow A \neq 0$ (Matriz nula)

$A \neq I$; (Matriz identidad)

Dato:

$A^2 + A = \mathbb{0} \Rightarrow A(A + I) = \mathbb{0}$

Luego:

$|A(A + I)|^t = \mathbb{0}^t$

$(A + I)^t . A^t = \mathbb{0}$

Tomamos determinante:

$\det(A^t + I) \det A^t = 0$

Como: $\text{Det}(A^t) = \text{Det}A$

$\Rightarrow \text{Det}(A^t + I)\text{Det}(A) = 0$

$\therefore |A| . |A^t + I| = 0$

Clave C

16. Sabemos que:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$\Rightarrow \text{Det}(A^{-1}) = \text{Det}\left(\frac{\text{Adj}(A)}{|A|}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Det}(A)^{-1} = \frac{1}{|A|^3}\text{Det}(\text{Adj}(A))$$

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3}\text{Det}(\text{Adj}(A))$$

$$|A|^2 = \text{Det}(\text{Adj}(A)) \quad ...(1)$$

Como:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$|\text{Adj}(A)| = (3 + 4 + 24) - (6 + 12 + 4)$

$\Rightarrow |\text{Adj}(A)| = 9 \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$|A|^2 = 9 \quad ...(3)$

Piden:

$$|A^{-1}|^2 = \left(\frac{1}{|A|}\right)^2 = \frac{1}{|A|^2}$$

$$\therefore |A^{-1}|^2 = \frac{1}{9}$$

Clave B

17. Nos piden:

$\text{Det}(P^{-1} . AP + 2I) =$

$\text{Det}(P^{-1} . AP + 2\underbrace{P^{-1}P}_{I}) =$

$\text{Det}[P^{-1}(A + 2I)P]$

$= (\text{Det}P)^{-1} . \text{Det}(A + 2I) . \text{Det}P$

$= \text{Det}(A + 2I)$

Luego:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -3 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \ |A + 2I| = -15 - 36 + 60 + 6 = 15$

Clave C

18.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix} = -3375$$

Por operaciones elementales:

$C_4 = C_4 - aC_3$; $C_3 = C_3 - aC_2$;

$C_2 = C_2 - aC_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 1 - a^4 & 0 & 0 \\ x & a^3 - ax & 1 - a^4 & 0 \\ y & z - ay & a^3 - az & 1 - a^4 \end{vmatrix} = -3375$$

Es una matriz triangular.

Luego:

$-(a^4 - 1)^3 = -3375$

$(a^4 - 1)^3 = 15^3 \Rightarrow a^4 = 16 \Rightarrow |a| = 2$

$\therefore \ a = 2 \ \vee \ a = -2$

Clave E

Resolución de problemas

19. Podemos establecer que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \quad a \neq 0 \ \wedge \ b \in R$$

$\Rightarrow \ AX = I \ \Rightarrow \ X = A^{-1} \quad (1)$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a^2 & 1/a \end{bmatrix}$$

En (1):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a^2 & 1/a \end{bmatrix}$$

Donde: $x_1 = 1/a$; $x_2 = 0$; $x_3 = -b/a^2$; $x_4 = 1/a$

Clave D

20.
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general:

$$A^n = \begin{cases} A; \text{ n es impar} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Luego: $S = A^{42} + A^{55}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Clave B

Nivel 3 (página 71) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Sea $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

I. Sea A una matriz cuadrada:
Si: $A^n = 0$
$\Rightarrow$ A es una matriz nilpotente
$\Rightarrow$ es verdadero

II. Si: $A^3 = A$
Multiplicamos por A^{-1}
$A^3 \cdot A^{-1} = AA^{-1}$
$A^2 = I$
$\therefore$ Solo cumple si A tiene inversa
$\Rightarrow$ es falso

III. Si A es idempotente se cumple:
$\Rightarrow A^2 = A$
Como A es inversible
$\Rightarrow A^2A^{-1} = AA^{-1}$
$A = I$
Luego:
$\text{Traz}(A) = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{n veces}} = n$
$\Rightarrow$ es verdadero

Clave D

22. I Inversa
II Índice de nilpotencia
III Involutiva
IV Idempotente
V Antisimétrica
VI Transpuesta

Razonamiento y demostración

23. Como es una matriz simétrica se cumple:

$x + 2y = 7$ ...(1)
$2y + 3z = 20$ ...(2)
$3z + x = 11$ ...(3)

Sumamos (1) y (3):
$2x + 2y + 3z = 18$ ...(4)

Reemplazamos (2) en (4):
$2x + 20 = 18$
$x = -1$

En (1): $-1 + 2y = 7 \Rightarrow y = 4$
En (3): $3z - 1 = 11 \Rightarrow z = 4$

Nos piden:
$x + y + z = -1 + 4 + 4 = 7$

Clave D

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{pmatrix}$

$|A| = 1(xy^2 - z^2x) - 1(x^2y - yz^2) + 1(zx^2 - y^2z)$
$|A| = \underbrace{xy^2} - \underline{\underline{z^2x}} - \overline{x^2y} + \overline{yz^2} + \underline{\underline{zx^2}} - \underbrace{y^2z}$
$|A| = y^2(x - z) + xz(x - z) - y(x^2 - z^2)$
$|A| = (x - z)(\widehat{y^2} + \underline{\underline{xz}} - \widehat{yx} - \underline{\underline{yz}})$
$|A| = (x - z)[y(y - x) - z(y - x)]$
$|A| = (x - z)(y - x)(y - z)$

$B = \begin{pmatrix} x - y & 0 & 0 \\ 0 & y - z & 0 \\ 0 & 0 & z - x \end{pmatrix}$

$|B| = (x - y)(y - z)(z - x)$

Nos piden:
$$\frac{\text{Det}(A)}{\text{Det}(B)} = \frac{(x - z)(y - x)(y - z)}{(x - y)(y - z)(z - x)} = 1$$

Clave D

25. La ecuación:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Por operaciones elementales:
$C_1 = C_1 - C_2$; $C_2 = C_2 - C_3$; $C_3 = C_3 - C_4$; $C_4 = C_4 - C_5$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \end{matrix}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Recuerda que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Luego:
$\therefore |A| = 2(92 + 15) + 60 + 120 = 394$

Clave A

26. Por dato:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando Y^2:

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando Y^3:

$$Y^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow Y^3 = 6I$
Elevando al exponente (13):
$(Y^3)^{13} = (6I)^{13}$
$Y^{39} = 6^{13}(I^{13}) = 6^{13} \cdot I$
Multiplicando por Y en ambos miembros:
$Y^{39} \cdot Y = (6^{13} \cdot I) \cdot Y$
$Y^{40} = 6^{13} \cdot Y$

$$\Rightarrow Y^{40} = 6^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma$ elementos de $Y^{40} = 6^{13}(1 + 2 + 3)$
$\therefore\ \Sigma$ elementos de $Y^{40} = 6^{13} \cdot 6 = 6^{14}$

Clave C

27. $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13$

$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$

$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$

$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2$

$M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4$

$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$

Luego, la matriz de cofactores es:

$$B = \begin{bmatrix} 13 & 2 & -7 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = B^t = \begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ \Sigma$elementos Adj(M) es: 8

Clave A

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Luego:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = B^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$|A| = 24 + 30 + 45 - (36 + 25 + 36)$
$|A| = 99 - 97 \Rightarrow |A| = 2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \Sigma$ elementos de A^{-1} es: 0

Clave A

Resolución de problemas

29. $x^2 = x \,.\, x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$x^3 = x^2 \,.\, x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Establecemos en forma general:

$$x^n = x^{n-1} \,.\, x = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = 11$

$$x^{11} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10} & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1024 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$$

Clave D

30. Se establece:

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \wedge O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando matrices:

$$Qx = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = O$$

$\Rightarrow Qx = O$ ...(1)

Donde:

$Q^2x = Q(Qx) = O$
$Q^3x = Q^2(Qx) = O$
$Q^{101}x = Q^{100}(Qx) = O$ ...(2)

Determinando el vector no nulo u:

$Pu = \alpha u$

Hacemos: $u = kx;\ k \in \mathbb{R} - \{0\};\ u \neq O$

Luego: $P(kx) = \alpha u$

De (2):

$Q^{100}(Qkx) = \alpha u$
$Q^{100}k(Qx) = \alpha u$
$Q^{100}k\ O = \alpha u$
$O = \alpha u$
$\Rightarrow \alpha = 0$

Luego, si $k = -1$:

$$u = kx = -1\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 73) Unidad 3

1. $2x + 3y = 5$ ...(1)

$x - y = 5$ ...(2)

Despejando x de (2):
$x = 5 + y$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1):
$2(5 + y) + 3y = 5$
$10 + 2y + 3y = 5$
$5y = -5 \Rightarrow y = -1$

Reemplazando $y = -1$ en (2):
$\Rightarrow x = 4$

Clave A

2. $\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 6 = -20$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 7 = -4$

$\Rightarrow x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s} = \dfrac{-20}{-4} \Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s} = \dfrac{-4}{-4} \Rightarrow y = 1$

Clave D

3. $x = 5 + 3y$ ...(1)
$7x - 39 = 9y$ ...(2)

De (2):

$x = \dfrac{9y + 39}{7}$

Entonces:

$5 + 3y = \dfrac{9y + 39}{7}$

$35 + 21y = 9y + 39$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{3}$

En (1):
$x = 5 + 3\left(\dfrac{1}{3}\right) = 6$

$\therefore x + y = \dfrac{19}{3}$

Clave C

4. $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = a + b$ ...(1)

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2a$ ...(2)

$\Rightarrow y = \left(2a - \dfrac{x}{a}\right)b$

Reemplazando el valor de y en (1):

$\dfrac{x}{a+b} + \left(2a - \dfrac{x}{a}\right)\dfrac{b}{a-b} = a + b$

$\dfrac{x}{a+b} - \dfrac{bx}{a(a-b)} = a + b - \dfrac{2ab}{a-b}$

$x\left[\dfrac{a^2 - 2ab - b^2}{a(a^2 - b^2)}\right] = \dfrac{a^2 - b^2 - 2ab}{a-b}$

$\dfrac{x}{a(a-b)(a+b)} = \dfrac{1}{a-b}$

$\therefore x = a^2 + ab$

Clave B

5. Resolviendo:

$\dfrac{x}{4a} + \dfrac{y}{4b} = \dfrac{3}{5}$ ...(I)

$\dfrac{x}{6a} + \dfrac{y}{5b} = \dfrac{14}{15}$ ...(II)

Multiplicando (II) por $\dfrac{3}{2}$:

$\dfrac{x}{4a} + \dfrac{3y}{10b} = \dfrac{7}{5}$ ...(III)

Restamos (III) y (I):
$\dfrac{3y}{10b} - \dfrac{y}{4b} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{2y}{40b} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow y = 16b$

Clave C

6. Datos:

$\dfrac{xy}{bx + ay} = \dfrac{bc}{b + c} \Rightarrow \dfrac{bx + ay}{xy} = \dfrac{b + c}{bc}$

$\Rightarrow \dfrac{b}{y} + \dfrac{a}{x} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ ...(I)

$\dfrac{yz}{cy + bz} = \dfrac{ac}{c + a} \Rightarrow \dfrac{cy + bz}{yz} = \dfrac{c + a}{ac}$

$\Rightarrow \dfrac{c}{z} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$ ...(II)

$\dfrac{zx}{az + cx} = \dfrac{ab}{a + b} \Rightarrow \dfrac{az + cx}{zx} = \dfrac{a + b}{ab}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{x} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ ...(III)

Sumando (I), (II) y (III):
$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ ...(α)

Reemplazando (II) en (α):
$\dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

$\dfrac{a}{x} = \dfrac{1}{b} \Rightarrow x = ab$

Clave C

7. Del sistema:
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y+1} = \dfrac{5}{4}$ ...(I)

$\dfrac{4}{x} + \dfrac{8}{y+1} = \dfrac{11}{3}$ ...(II)

Multiplicando a (I) por 4 y restándole (II) se obtiene:

$\dfrac{4}{y+1} = 5 - \dfrac{11}{3} = \dfrac{4}{3}$

$y + 1 = 3 \Rightarrow y = 2$

Reemplazando en (I):
$\dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow x = 4$

Nos piden: $xy = 4(2) = 8$

Clave C

8. En el sistema:
$3x + 7y + 2z = 1$
$2x + 3y + 7z = 1$
$kx + 2y + 3z = 0$

Dato: $y = z$

Reemplazando:
$3x + 9y = 1$ ...(I)
$2x + 10y = 1$ ...(II)
$kx + 5y = 0$ ...(III)

Resolviendo (I) y (II):
$x = \dfrac{1}{12} \wedge y = \dfrac{1}{12}$

Reemplazando en (III):

$\dfrac{k}{12} + 5\left(\dfrac{1}{12}\right) = 0 \Rightarrow k = -5$

Clave C

9. Del sistema:
$x + y = 6$ ...(I)
$y + z = 2$ ...(II)
$z + x = 14$ ...(III)
De (III) y (II): $x - y = 12$ ...(IV)
De (I) y (IV): $2y = -6 \Rightarrow y = -3$
Nos piden: $x + z - y = 14 - (-3) = 17$

Clave D

10. Del sistema:
$xy(x + y) = 4$ ...(I)
$x^2 + y^2 = 14;\ x > y$ ...(II)

Elevamos al cuadrado (I):
$(xy)^2(\underbrace{x^2 + y^2}_{14} + 2xy) = 16$

$(xy)^2[7 + xy] = 8$
$(xy)^3 + 7(xy)^2 = 8$ ...(α)

Un valor que satisface (α) es:
$xy = 1$
Reemplazando en (I):
$xy(x + y) = 4$
$1(x + y) = 4 \Rightarrow x + y = 4$
$\therefore -x - y = -4$

Clave A

11. Del sistema:
$x(x + 2y + 3z) = 50$ ...(I)
$y(x + 2y + 3z) = 10$ ...(II)
$z(x + 2y + 3z) = 10$ ...(III)

Dividiendo (I) y (II):
$\dfrac{x}{y} = 5 \Rightarrow x = 5y$ ...(α)

Dividiendo (II) y (III):

$\frac{y}{z} = 1 \Rightarrow y = z$ ...(β)

Reemplazando (β) en (I) y (II):

$x(x + 5y) = 50$ ...(θ)

$y(x + 5y) = 10$

Reemplazando (α) en (θ):

$5y(10y) = 50 \Rightarrow y^2 = 1$

$z = y = \pm 1$

En (α): $x = \pm 5$

Nos piden: $x + y + z = -5 - 1 - 1 = -7$

Clave D

12. Del enunciado:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} & ...(1) \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} & ...(2) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} & ...(3) \end{cases}$$

Sumando (1); (2) y (3):

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{5 + 3 + 4}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

Luego:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2 - 1}{20} = \frac{1}{20}$$

$\therefore x = 20$

Clave B

13. Por dato:

$$\begin{cases} xy(x + y) = 420 & ...(1) \\ x^3 + y^3 = 468 & ...(2) \end{cases}$$

Sabemos:

$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$(x + y)^3 = 468 + 3 \,.\, 420$

$(x + y)^3 = 1728 \Rightarrow x + y = 12$

$\therefore 2x + 2y = 24$

Clave E

14. Del sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 36 & ...(1) \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 & ...(2) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado (2):

$x + y - 2\sqrt{xy} = 4$ ...(3)

Sumando (1) y (3):

$\Rightarrow x + y = 20$ ...(4)

Reemplazando (4) en (1):

$20 + 2\sqrt{xy} = 36$

$2\sqrt{xy} = 16$

$\Rightarrow xy = 64$

Piden:

$$E = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \sqrt{\frac{x + y}{xy}} = \sqrt{\frac{(20)}{(64)}}$$

$$\therefore\ E = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 75) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Del sistema:

$2x + 7y = m$

$3x + 5y = 13$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} m & 7 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 5m - 91$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 3m$$

Como las soluciones son positivas, entonces:

$$x = \frac{5m - 91}{-11} > 0$$

$\Rightarrow 5m - 91 < 0$

$\Rightarrow m < \frac{91}{5}$ ...(1)

$$y = \frac{26 - 3m}{-11} > 0$$

$26 - 3m < 0$

$\Rightarrow \frac{26}{3} < m$ ...(2)

De (1) y (2):

$$\therefore\ \frac{26}{3} < m < \frac{91}{5}$$

Clave A

2.

	$x^2 + y^2 = 29$ $x + y = 3$	$x + 4y = 12$ $5x + 3y = 26$	
$ax + y = 0$ $x + ay = 0$	$ax + y = 0$ $x + ay = 0$		
$x^2 + y^2 = 29$ $x + y = 3$	$x^2 + y^2 = 29$ $x + y = 3$		$x + 4y = 12$ $5x + 3y = 26$
$x^2 + y^2 = 29$ $x + y = 3$		$x + 4y = 12$ $5x + 3y = 26$	$x + 4y = 12$ $5x + 3y = 26$

Razonamiento y demostración

3. $\begin{cases} 3\left(\frac{1}{x}\right)+4\left(\frac{1}{y}\right)=1 \\ 21\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{y}\right)=2 \end{cases}$

Se tiene:

$$\frac{1}{x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 21 & 2\end{vmatrix}}=\frac{2-8}{6-84}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{-6}{-78}=\frac{1}{13}\Rightarrow x=13$$

$$\frac{1}{y}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 21 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 21 & 2\end{vmatrix}}=\frac{6-21}{6-84}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{-15}{-78}=\frac{5}{26}\Rightarrow y=\frac{26}{5}$$

$$\therefore xy=\frac{13\cdot 26}{5}=67{,}6$$

Clave E

4. Resolviendo:

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=a \qquad ...(I)$$

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=b \qquad ...(II)$$

Sumando (I) y (II):

$$\frac{2}{x-y}=a+b \Rightarrow x-y=\frac{2}{a+b} \qquad ...(\alpha)$$

Reemplazando en (I):

$$\frac{a+b}{2}+\frac{1}{x+y}=a$$

$$\frac{1}{x+y}=\frac{a-b}{2}\Rightarrow x+y=\frac{2}{a-b} \qquad ...(\beta)$$

Luego:

$$(\alpha)+(\beta): 2x=\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a-b}\Rightarrow x=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

$$(\beta)-(\alpha): 2y=\frac{2}{a-b}-\frac{2}{a+b}\Rightarrow y=\frac{2b}{a^2-b^2}$$

Nos piden: $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$

Clave C

5. $\frac{50x}{7}+\frac{0{,}3}{y}=5$

$$-5\left(\frac{10x}{7}+\frac{9}{y}=31\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{50x}{7}+\frac{0{,}3}{y}&=5\\ -\frac{50x}{7}-\frac{45}{y}&=-155\end{aligned}\right\}(+)$$

$$\frac{0{,}3}{y}-\frac{45}{y}=-150\Rightarrow\frac{-44{,}7}{y}=-150$$

$$\therefore\ y=0{,}298$$

Clave B

6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \qquad ...(1)$

$$\frac{7}{x}-\frac{5}{y}=\frac{11}{6} \qquad ...(2)$$

Multiplicando (1) por 5:

$$\left.\begin{aligned}\frac{5}{x}+\frac{5}{y}&=\frac{25}{6}\\ \frac{7}{x}-\frac{5}{y}&=\frac{11}{6}\end{aligned}\right\}(+)$$

$$\frac{12}{x}=6\Rightarrow x=2$$

Reemplazando x = 2 en (1):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3$$

$$\therefore\ xy=6$$

Clave D

7.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=5\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=7\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=6\end{aligned}\right\}(+)$$

$$2\Big(\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}_{5}+\frac{1}{z}\Big)=18$$

$$10+\frac{2}{z}=18$$

$$\frac{2}{z}=8\Rightarrow z=\frac{1}{4}$$

Clave C

8. $5\sqrt{x}-3\sqrt{y}=3 \qquad ...(1)$

$$25x-9y=27 \qquad ...(2)$$

$$25x-9y=\left(5\sqrt{x}\right)^2-\left(3\sqrt{y}\right)^2$$

$$27=\left(5\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$$

$$27=3\left(5\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$$

$$\Rightarrow\ 5\sqrt{x}+3\sqrt{y}=9 \qquad ...(3)$$

Sumando (1) y (3):

$$\left.\begin{aligned}5\sqrt{x}-3\sqrt{y}&=3\\ 5\sqrt{x}+3\sqrt{y}&=9\end{aligned}\right\}(+)$$

$$10\sqrt{x}=12\Rightarrow 5\sqrt{x}=6$$

Reemplazando $5\sqrt{x}=6$ en (1):

$$6-3\sqrt{y}=3$$

$$3=3\sqrt{y}$$

$$\therefore\ y=1$$

Clave A

Resolución de problemas

9. Sean $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ el trabajo que realizan A y B en un día respectivamente, entonces del enunciado:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \qquad ...(1)$$

Además:

$$\frac{20}{x}+\frac{6}{y}=1 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2): $\frac{1}{x}=\frac{1}{28}$

Entonces, en un día A hace 1/28 del trabajo. Por lo tanto, para realizar todo el trabajo A demorará 28 días.

$\therefore$ x = 28 días

Clave E

10. $\sqrt[3]{x+y+2}-\sqrt{2x-3y-7}=-3 \qquad ...(1)$

$$2\sqrt[3]{x+y+2}+3\sqrt{2x-3y-7}=14 \qquad ...(2)$$

$$(I)\times 3: 3\sqrt[3]{x+y+2}-3\sqrt{2x-3y-7}=-9 \ ...(3)$$

$$(III)+(II):\quad 5\sqrt[3]{x+y+2}=5$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[3]{x+y+2}=1$$

$$x+y+2=1$$

$$\therefore\ x+y=-1$$

Clave B

Nivel 2 (página 76) Unidad 3

Comunicación matemática

11. Dado el sistema:

$$\begin{cases}2x-3y+4z=0\\ 5x+2y+3z=7\\ 19x+0y+17z=33\end{cases}$$

Por la regla de Cramer:

$$\Delta s=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ 19 & 0 & 17\end{vmatrix}$$

$$\Delta s=68-171+0-(152-255+0)$$

$$\Delta s=-103-(-103)=0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}0 & -3 & 4\\ 7 & 2 & 3\\ 33 & 0 & 17\end{vmatrix}=-204\neq 0$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 5 & 7 & 3\\ 19 & 33 & 17\end{vmatrix}=168\neq 0$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 5 & 2 & 7\\ 19 & 0 & 33\end{vmatrix}=228\neq 0$$

Entonces:

$\Delta s=0\ \wedge\ \Delta x\neq 0;\ \Delta y\neq 0;\ \Delta z\neq 0$

Por lo tanto, el sistema es incompatible (no tiene solución).

Clave E

12.

CRA	M	ER
IGUAL	A	CIÓN
SUSTI	T	UCIÓN
INDETE	R	MINADO
DETERM	I	NANTE
REDUC	C	IÓN
RA	I	CES
COMP	A	TIBLE
LINEA	L	ES

Razonamiento y demostración

13. Del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{y+1}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Sea:

$a=\dfrac{1}{x} \quad \wedge \quad b=\dfrac{1}{y+1}$ ...(1)

Entonces:

$a+3b=\dfrac{5}{4}$ ...(2)

$4a-7b=\dfrac{1}{4}$ ...(3)

$$a=\frac{\Delta a}{\Delta s}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{4} & 3 \\ \frac{1}{4} & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{35}{4}-\frac{3}{4}}{-7-12}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-\frac{38}{4}}{-19}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2$$

Reemplazando $a=\frac{1}{2}$ en (2):

$\left(\frac{1}{2}\right)+3b=\frac{5}{4} \Rightarrow b=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{y+1}=\frac{1}{4} \Rightarrow y=3$

$\therefore x=2;\ y=3$

Clave E

14. Del sistema:

$|x|+|y|=2$ ...(I)

$x|y|=-1$ ...(II)

De (II): $x=-1/|y|;\ x<0$ ...(α)
Luego de (I) se tiene:
$-x+|y|=2$ ...(III)

Reemplazando (α) en (III):

$\frac{1}{|y|}+|y|=2$

Dando forma:
$(|y|-1)^2=0 \Rightarrow |y|=1$

Reemplazando $|y|=1$ en (II): $x=-1$

Luego, tenemos: $|y|=1 \ \wedge \ x=-1$
$\Rightarrow y=\pm 1 \ \wedge \ x=-1$

$\Rightarrow \begin{cases} y=+1,\ x=-1 \\ y=-1,\ x=-1 \end{cases}$

$\therefore$ Hay 2 pares de soluciones para el sistema.

Clave D

15. Del sistema:

$x+y+z=5$ ...(I)
$2x+y-z=3$ ...(II)
$x-y+z=m$ ...(III)

Sumando (II) y (III):
$3x=3+m$ ...(IV)

$x=\frac{3+m}{3}\geq 0$

$m\geq -3$ ...(α)

Sumando (I) y (II):
$3x+2y=8$

Reemplazando (IV):
$3+m+2y=8 \Rightarrow 2y=5-m$

$y=\frac{5-m}{2}\geq 0$

$m\leq 5$ ...(β)

Sumando (I) y (III):

$2x+2z=m+5$

$\frac{2}{3}(m+3)+2z=m+5$

$\Rightarrow z=\frac{m+9}{6}\geq 0$

$m\geq -9$ ...(θ)

De α, β y θ se tiene:
$-3\leq m\leq 5$

Clave D

16. Si:

$x+2\sqrt{x+y+z}=m$ ...(I)
$y+2\sqrt{x+y+z}=b$ ...(II)
$z+2\sqrt{x+y+z}=n$ ...(III)

Además: $m+b+n=16$
Sumando (I), (II) y (III):

$x+y+z+6\sqrt{x+y+z}=m+b+n$

$\sqrt{x+y+z}^2+6\sqrt{x+y+z}-16=0$

$\sqrt{x+y+z}$ 8
$\sqrt{x+y+z}$ -2

$\sqrt{x+y+z}=-8 \vee \sqrt{x+y+z}=2$

Luego:
$x+y+z=4$
Reemplazando en (I):
$x+2\sqrt{4}=m \Rightarrow x=m-4$

Clave C

17. Resolviendo:

$\sqrt{x+y}+\sqrt{5}\sqrt{x+5y}=\sqrt{5}+25$ ...(I)

$\sqrt{x+5y}-\sqrt{5}\sqrt{x+y}=5\sqrt{5}-5$ ...(II)

(II) $\times\sqrt{5}$:

$\sqrt{5}\sqrt{x+5y}-5\sqrt{x+y}=25-5\sqrt{5}$ ...(III)

Restamos (I) y (III):

$6\sqrt{x+y}=6\sqrt{5}$

$x+y=5$ ... (α)

Reemplazando en (I):

$\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{x+5y}=\sqrt{5}+25$

$\sqrt{x+5y}=\frac{25}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}$

$x+5y=125$ ... (β)

Restando (β) y (α):
$4y=120 \Rightarrow y=30$
$x=-25$

Nos piden: $xy=-750$

Clave B

18. Resolviendo:

$\frac{2}{x-y-1}+\frac{3}{3x+y+3}=\frac{17}{24}$ ... (I)

$\frac{3}{x-y-1}-\frac{1}{3x+y+3}=\frac{3}{8}$ ... (II)

(II) $\times$ 3: $\frac{9}{x-y-1}-\frac{3}{3x+y+3}=\frac{9}{8}$ ... (III)

Sumamos (I) y (III):

$\frac{11}{x-y-1}=\frac{11}{6}$

$x-y=7$ ...(α)

Reemplazando en (I):

$\frac{2}{6}+\frac{3}{3x+y+3}=\frac{17}{24}$

$\frac{3}{3x+y+3}=\frac{17}{24}-\frac{2\times 4}{6\times 4}$

$\frac{3}{3x+y+3}=\frac{9}{24} \Rightarrow \frac{1}{3x+y+3}=\frac{1}{8}$

$3x+y=5$ ... (β)

Sumamos (α) y (β):
$4x=12 \Rightarrow x=3$

Clave C

Resolución de problemas

19. Factorizando la primera ecuación:

$(2x+9y)(x-2y)=0$

$x=\frac{-9y}{2} \ \vee \ x=2y$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$-9y^2/2+y^2-12=0 \Rightarrow -7y^2/2=12;\ y\notin\mathbb{R}$
$\vee$
$2y^2+y^2-12=0 \Rightarrow y^2=4;\ y=\pm 2$

Luego: $y=2 \Rightarrow x=4;$
$y=-2 \Rightarrow x=-4$

Los pares ordenados son: $(4;2);(-4;-2)$

Clave C

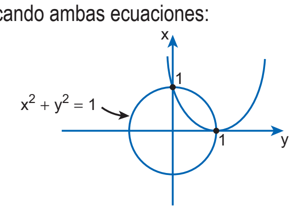
20. Se pide:

Conjunto solución de: $\begin{cases} x^2-2x-y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

El sistema es equivalente a:

$\begin{cases} (x-1)^2=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Graficando ambas ecuaciones:



Se observa que los puntos (1; 0) y (0; 1) verifican ambas ecuaciones, por lo tanto, son soluciones del sistema, es decir.
CS = {(1; 0), (0; 1)}

Clave D

Nivel 3 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Del sistema:

$2x + 3y + 4z = 0$ ...(I)
$5x + 6y + 7z = 0$ ...(II)
$x^2 + y^2 + z^2 = 24$ ...(III)

Restando (I) y (II):
$3x + 3y + 3z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$ ...(α)

Reemplazando α en (III):
$x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 24$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + xy = 12$ ...(β)

Reemplazando α en (I):
$2x + 3y + 4[-(x + y)] = 0$
$y = -2x$ ...(θ)

Reemplazando (θ) en (β):
$x^2 + (-2x)^2 + x(-2x) = 12$
$3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\ 2$
En (θ): $y = \mp\ 4$
En (α): $z = \pm\ 2$
$\therefore$ CS = {(2; –4; 2), (–2; 4; –2)}

Clave C

22. – Se denomina sistema de ecuaciones al conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, las cuales pueden verificarse para algunos valores asignados a sus incógnitas.

– Las soluciones de un sistema de ecuaciones es aquella colección numérica correspondiente a las incógnitas que verifica cada una de las ecuaciones en forma simultánea.
– Resolver un sistema consiste en determinar el conjunto solución que puede tener un elemento, infinitos elementos o ningún elemento.
– El sistema de ecuaciones no lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones en el cual las expresiones matemáticas que intervienen en el sistema pueden ser algebraicas o no algebraicas.
– Según el número de ecuaciones y el número de incógnitas, se denomina sistema incompatible, imposible, absurdo o inconsistente cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas.
– Se denomina ecuaciones independientes, si los coeficientes de una misma incógnita no son proporcionales.

Razonamiento y demostración

23. Si:

$\dfrac{xy}{5x + 4y} = 6 \Rightarrow \dfrac{5x + 4y}{xy} = \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{5}{y} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{6}$ ...(I)

$\dfrac{xz}{3x + 2z} = 8 \Rightarrow \dfrac{3x + 2z}{xz} = \dfrac{1}{8}$

$\dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{8}$ ...(II)

$\dfrac{yz}{3y + 5z} = 6 \Rightarrow \dfrac{3y + 5z}{yz} = \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{3}{z} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{6}$ ...(III)

Restando (III) y (II):
$\dfrac{5}{y} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{24}$ ...(IV)

(I) + 2(IV) : $\dfrac{15}{y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = 60$

Reemplazando en (I):
$\dfrac{5}{60} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = 48$

Reemplazando en (III):
$\dfrac{3}{z} + \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow z = 36$

Nos piden: $x + y + z = 144$

Clave E

24. CS = $\{x_0; y_0\}$ es único
$x^2 + y^2 + 2x \leq 1$
$x - y + a = 0$

Como tiene CS único los gráficos de las ecuaciones se cortan en un solo punto.

Entonces resolvemos:
$x^2 + y^2 + 2x = 1$ ...(I)
$y = x + a$ ...(II)

(II) en (I):
$x^2 + (x + a)^2 + 2x - 1 = 0$

Reduciendo:
$2x^2 + (2a + 2)x + a^2 - 1 = 0$ ...(α)

Como tiene solución única, se cumple:
$b^2 = 4ac$
$(2a + 2)^2 = 4(2)(a^2 - 1)$
$(a + 1)^2 = 2(a + 1)(a - 1)$
$a = 3 \vee a = -1$

Reemplazando en (α):
Para a = 3:
$2x^2 + 8x + 8 = 0$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$

En (II): $y_0 = -2 + 3 = 1$

Nos piden:
$x_0 + y_0 = -2 + 1 = -1$

Para a = –1:
$2x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
En II: $y_0 = 0 - 1 = -1$
$\therefore\ x_0 + y_0 = -1$

Clave A

25. $x + y + 9z = 83$ ...(1)
$5x + 12y + 9z = 155$ ...(2)
$x + 2y + 4z = 47$ ...(3)

Restando (2) y (1):
$5x + 12y + 9z = 155$
$x + y + 9z = 83$ (–)
$4x + 11y = 72$ ...(4)

Despejando z de (1) y (3):
$z = \dfrac{83 - x - y}{9}$
$z = \dfrac{47 - x - 2y}{4}$
$\Rightarrow \dfrac{83 - x - y}{9} = \dfrac{47 - x - 2y}{4}$

$332 - 4x - 4y = 423 - 9x - 18y$
$5x + 14y = 91$ ...(5)

Despejando y de la ecuación (4) y (5):
$y = \dfrac{72 - 4x}{11} \wedge y = \dfrac{91 - 5x}{14}$

$\dfrac{72 - 4x}{11} = \dfrac{91 - 5x}{14}$

$1008 - 56x = 1001 - 55x$
$\therefore\ x = 7$

Clave D

26. $(x + y)(x + z) = 30$ ...(1)
$(y + z)(y + x) = 15$ ...(2)
$(z + x)(z + y) = 18$ ...(3)

Multiplicando (1) por (3):
$(x + y)(x + z)^2 (y + z) = 30 . 18$
$\underbrace{(x + y)(y + z)}_{15}(x + z)^2 = 540$

$(x + z)^2 = 36$
$x + z = 6$ ...(4)

Reemplazando este valor en (1):
$x + y = 5$ ...(5)

Reemplazando en (2):
$z + y = 3$ ...(6)

Sumando (4); (5) y (6):
$2x + 2y + 2z = 14$
$x + y + z = 7$
$6 + y = 7$
$\therefore\ y = 1$

Clave A

27. Del enunciado se tiene:

$y(xy + 1) = 21 \Rightarrow xy = \dfrac{21}{y} - 1$ ...(1)

$y^2(x^2y^2 + 1) = 333 \Rightarrow (xy)^2 = \dfrac{333}{y^2} - 1$ ...(2)

De (1) y (2):
$\left(\dfrac{21}{y} - 1\right)^2 = \dfrac{333}{y^2} - 1$

$\left(\dfrac{21 - y}{y}\right)^2 = \dfrac{333 - y^2}{y^2}$

Resolviendo tenemos:

$441 - 42y + y^2 = 333 - y^2$

$y^2 - 21y + 54 = 0$

$y \quad\quad -18$

$y \quad\quad -3$

$\Rightarrow (y-18)(y-3) = 0$

$\Rightarrow y = 18 \lor y = 3$

Si $y = 18$, entonces reemplazando en (1):

$$xy = \frac{21}{(18)} - 1 = \frac{1}{6}$$

Si $y = 3$, entonces reemplazando en (1):

$$xy = \frac{21}{(3)} - 1 = 6$$

Clave E

28. Del sistema:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^{3x-4} \\ \sqrt{x+5y} = \sqrt{3x+2} \end{cases}$$

Se deduce:

$$\begin{cases} x + y = 3x - 4 \Rightarrow 2x - y = 4 & \text{...(1)} \\ x + 5y = 3x + 2 \Rightarrow 5y - 2x = 2 & \text{...(2)} \end{cases}$$

Sumando (1) y (2):

$$4y = 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Reemplazando el valor de y en (1):

$$2x - \left(\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow 2x = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

$$\therefore x + y = \frac{11}{4} + \frac{3}{2} = \frac{17}{4}$$

Clave C

Resolución de problemas

29. Establecemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{\sqrt[3]{d}} = k \quad \text{...(1)}$$

$$\frac{a^3 + 16}{b^3 + 54} = \frac{c^3}{d} \quad \text{...(2)}$$

De (1): $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{c^3}{d} \Rightarrow a^3d = b^3c^3$

De (2): $a^3d + 16d = b^3c^3 + 54c^3$

$16d = 54c^3$

$8d = 27c^3$

$$\Rightarrow \frac{d}{c^3} = \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{d^{1/3}}{c} = \frac{3}{2} \quad \text{...(3)}$$

De (1): $\dfrac{2a^2}{2b^2} = \dfrac{-c^2}{-d^{2/3}} = k^2$

$$\frac{2a^2 - c^2}{2b^2 - d^{2/3}} = k^2 \quad \text{...(4)}$$

De (3): $\dfrac{c}{\sqrt[3]{d}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{c^2}{d^{2/3}} = \dfrac{4}{9} = k^2$

Nos piden: $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$

Clave A

30. Del sistema:

$x + y = 12 \quad \text{...(1)}$

$z > 0;\ x^2 + y^2 = z \quad \text{...(2)}$

De (1): $y = 12 - x \quad \text{...(3)}$

$x^2 + (12 - x)^2 = z$

$x^2 + 144 - 24x + x^2 = z$

$2x^2 - 24x + 144 - z = 0$

$2(x^2 - 12x) + 144 - z = 0$

$2(\underbrace{x^2 - 12x + 36}_{\text{tcp}} - 36) + 144 - z = 0$

$2((x-6)^2 - 36) + 144 - z = 0$

$2(x-6)^2 - 72 + 144 - z = 0$

$2(x-6)^2 + 72 = z$

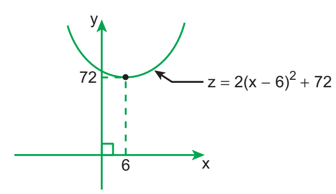
$z = 2(x-6)^2 + 72$

Donde, para que z sea mínimo

$x - 6 = 0$

$Z_{mín.} = 2\underbrace{(x-6)^2}_{=0} + 72$

$Z_{mín.} = 72$



Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 78) Unidad 3

1. $3(x^2 - 4x + 1) + 7x = 5 + 4x$

$3x^2 - 12x + 3 + 7x = 5 + 4x$

$3x^2 - 12x + 3 + 7x - 5 - 4x = 0$

$3x^2 - 9x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{6}$$

Clave A

2. $2x^2 - x + 4m = 0$

Por dato, si las raíces son recíprocas, entonces:

$x_1 \,.\, x_2 = 1$

$\Rightarrow \frac{4m}{2} = 1$

$\therefore\ m = \frac{1}{2}$

Clave B

3. $(2x - 3)^2 = (x + 5)^2 - 11x - 26$

Desarrollando:

$4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 10x + 25 - 11x - 26$

$3x^2 - 11x + 10 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(10)}}{6}$$

$$x = \frac{11 \pm 1}{6}$$

$x_1 = 2 \ \wedge\ x_2 = \frac{5}{3}$

Clave C

4. $x^2 - (m^2 - 5)x - 8m + 3 = 0$

Dato: $x = -3$

Reemplazando:

$(-3)^2 - (m^2 - 5)(-3) - 8m + 3 = 0$

$9 + 3m^2 - 15 - 8m + 3 = 0$

$3m^2 - 8m - 3 = 0$

$3m \quad\ \ 1 \ \} \ m = -1/3 \ \vee$

$m \quad -3 \ \} \ m = 3$

Luego: si $m = 3$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$x \quad -7 \ \} \ x = 7$

$x \quad\ \ 3 \ \} \ x = -3$

Luego: si $m = -1/3$

$$x^2 - \left(\frac{1}{9} - 5\right)x + \frac{8}{3} + 3 = 0$$

$9x^2 + 44x + 17 \,.\, 3 = 0$

$9x \quad 17 \ \} \ x = -17/9 \ \vee$

$x \quad\ \ 3 \ \} \ x = -3$

$\therefore x = 7 \ \vee\ x = -\frac{17}{9}$

Clave E

5. $\frac{k+1}{3x+2} = \frac{k-1}{x^2-2x}$

$(k + 1)x^2 - 2(k + 1)x = 3(k - 1)x + 2(k - 1)$

$(k + 1)x^2 - (5k - 1)x - 2(k - 1) = 0$

Dato: $x_1 + x_2 = 0$ (Raíces simétricas)

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

Entonces:

$-(5k - 1) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$

Clave A

6. En la ecuación:

$a^2x^2 - (a + 2)x + 1 = 0$

Dato: $x_1 = x_2$

Se cumple:

$b^2 = 4ac$

Reemplazando:

$[-(a + 2)]^2 = 4a^2(1)$

$a^2 + 4a + 4 = 4a^2$

$3a^2 - 4a - 4 = 0$

$3a \quad\ \ 2$

$a \quad -2$

$\Rightarrow a = \frac{-2}{3} \ \vee\ a = 2$

Clave E

7. $(m - 1)x^2 + (5m + 15)x + 2 = 0$

Dato: $x_1 = -x_2$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

$5m + 15 = 0 \Rightarrow m = -3$

Nos piden:

$2m + 1 = 2(-3) + 1 = -5$

Clave A

8. $2x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$

Dato: $x_1 - x_2 = 1$

Sabemos que:

$x_1 - x_2 = \pm\frac{\sqrt{\triangle}}{a}$

$\pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 1$

$\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = a$

Elevando al cuadrado:

$b^2 - 4ac = a^2$

Reemplazando:

$[-(m - 1)]^2 - 4(2)(m + 1) = 2^2$

Desarrollando:

$m^2 - 10m - 11 = 0$

$m \quad -11$

$m \quad\ \ 1$

$\Rightarrow m = 11 \ \vee\ m = -1$

Clave B

9. $x_1 + x_2 = 7 \ \wedge\ x_1 \,.\, x_2 = 12$

$\Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \,.\, x_2 = 0$

$\therefore x^2 - 7x + 12 = 0$

Clave D

10. $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{9}{14}$

$x_1 . x_2 = \frac{1}{14}$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

$x^2 - \frac{9}{14}x + \frac{1}{14} = 0$

$\therefore 14x^2 - 9x + 1 = 0$

Clave C

11. $(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = (x - 2)^2$

Desarrollamos cada binomio:

$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$x \quad -7$

$x \quad -3$

$(x - 7)(x - 3) = 0$

$x = 7 \ \vee\ x = 3$

$CS = \{3; 7\}$

Clave B

12. De la ecuación:

$x^2 + a^2x + a = 0$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -a^2$

$x_1x_2 = a$

Nos piden:

$x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2 = -a^2 + a^2 = 0$

Clave B

13. $6x^2 + (2m + 3)x + m = 0$

Del enunciado, se deduce:

$\Delta = (2m + 3)^2 - 4(6)(m) = 0$

$(2m + 3)^2 - 24m = 0$

$4m^2 + 12m + 9 - 24m = 0$

$4m^2 - 12m + 9 = 0$

$(2m - 3)^2 = 0$

$\Rightarrow 2m - 3 = 0$

$\therefore m = \frac{3}{2}$

Clave D

14. $5(m + n + 18)x^2 + 4(m - n)x + 3mn = 0$

Si es incompatible, entonces:

$m + n + 18 = 0 \Rightarrow m + n = -18$ ...(1)

$m - n = 0 \Rightarrow m = n$ ...(2)

De (1) y (2): $m = n = -9$

Piden:

$m - 2n = -9 - 2(-9) = 9$

$\therefore\ m - 2n = 9$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 80) Unidad 3

Comunicación matemática

1. De la ecuación:

$x^2 - 14x + (49 - y^2) = 0$

$\Delta = 196 - 4(49 - y^2)$

I. (F)

$y < 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow 49 - y^2 < 49$

$\Rightarrow 4(49 - y^2) < 196$

$196 - 4(49y^2) > 0$

$\Rightarrow \Delta > 0$ (tiene 2 soluciones)

II. (V)

$y = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ (única solución doble)

III. (V)

$y \neq 0 \Rightarrow \Delta \neq 0$ (tiene 2 raices reales y distintas)

Clave A

2. I. (F)

$x = -1 \Rightarrow a(-1)^2 - b(-1) + 1 = 0$

$a + b = -1$

II. (V)

$x = a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow x^2 = a - 2 + a^{-1}$

$\Rightarrow x^2 + 2 + b = a - 2 + a^{-1} + 2 + b = 0$

$a + b = -a^{-1}$

III. (V)

$x = 2 \Rightarrow a(2)^2 + b(2) - 10 = 0$

$a + b = 5 - a$

Clave B

Razonamiento y demostración

3. De la ecuación:

$2x^2 - 6x + 8 = 0;\ CS = \{x_1; x_2\}$

$x^2 - 3x + 4 = 0$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-3)}{1} = 3$

$x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{1} = 4$

Nos piden: $(1 + x_1)(1 + x_2) + 3$

Multiplicando:

$1 + \underbrace{x_1 + x_2}_{} + \underbrace{x_1x_2 + 3}_{}$

$1 + 3 \quad + \quad 4 + 3 = 11$

Clave E

4. $x_1 - x_2 = 6 \wedge \dfrac{x_1}{x_2} = 2$

$x_1 = 2x_2$

Reemplazando:

$2x_2 - x_2 = 6$

$x_2 = 6$

$x_1 = 12$

Suma de raíces: $x_1 + x_2 = 18$

Producto de raíces: $x_1 . x_2 = 72$

Luego:

$x^2 - 18x + 72 = 0$

Clave E

5. Como x_1 y x_2 son recíprocas:

$\Rightarrow x_1 . x_2 = 1$

Luego:

$\dfrac{9}{2m - 1} = 1 \Rightarrow 9 = 2m - 1$

$\therefore\ m = 5$

Clave D

6. $a\sqrt{x}^2 + b\sqrt{x} + c = 0$

Sabemos:

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -\dfrac{b}{a}$ ...(I)

$\sqrt{x_1}\ \sqrt{x_2} = \dfrac{c}{a}$ ...(II)

Elevando al cuadrado en (I):

$x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1}\ \sqrt{x_2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

Reemplazando (II):

$x_1 + x_2 = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

Clave E

7. Dato: $x_1 = \dfrac{-3}{2} \vee x_2 = 5$

Luego:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{3}{2} + 5 = \dfrac{7}{2}$

$P = x_1x_2 = \dfrac{-3}{2} . 5 = -\dfrac{15}{2}$

Nos piden:

$x^2 - Sx + P = 0$

$x^2 - \dfrac{7}{2}x - \dfrac{15}{2} = 0$

$2x^2 - 7x - 15 = 0$

Clave B

8. $\sqrt{2x + 13} = \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 6}$ ...(1)

Elevando al cuadrado (1):

$2x + 13 = 2x + 9 + 2\sqrt{(x + 3)(x + 6)}$

$2 = \sqrt{x^2 + 9x + 18}$

$4 = x^2 + 9x + 18$

$0 = x^2 + 9x + 14$

x 7

x 2

$\Rightarrow (x + 7)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = -7$ (no cumple la ecuación (I)) $\vee\ x = -2$

Clave D

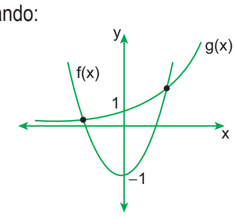
9. De la ecuación:

$x^2 - 2^x = 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 2^x$

Sea: $f(x) = x^2 - 1 \ \wedge\ g(x) = 2^x$

Graficando:



Por lo tanto, el número de cortes de los gráficos (2), es el número de raíces reales que tiene la ecuación original.

Clave B

Resolución de problemas

10.

	Hace 20 años	Actual
Betsabe	x – 20	x

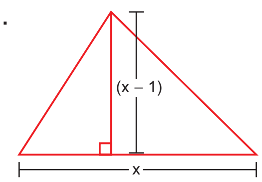
Según el enunciado: hace 20 años

$(x - 20)^2 = 81$

$\therefore\ x = 29$ años

Clave B

11.



$\dfrac{x(x - 1)}{2} = 28\ m^2$

$x^2 - x - 56 = 0$

x +7

x –8

$x = 8$ m

Base = x = 8 m

Altura = x – 1 = 8 – 1 = 7 m

Clave C

Nivel 2 (página 80) Unidad 3

Comunicación matemática

12. Sea la ecuación: $ax^2 - bx - a = 0$

Entonces:

$\Delta = b^2 - 4(a)(-a) = b^2 + 4a^2$

Por dato: $a; b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow \Delta > 0$

Por lo tanto, las raíces son reales y distintas.

Clave A

13.

Clave D

14. Trasladamos los datos al siguiente recuadro:

	Presente	Dentro de $4x^2$ años
Florencio	$6R^2$	$6R^2 + 4x^2$
Ramón	R^2	$R^2 + 4x^2$
	$F = 6R^2$	$F = 2R$ ...(1)

De (1):

$6R^2 + 4x^2 = 2(R^2 + 4x^2)$

$R = x$

VFFFF

Razonamiento y demostración

15. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$(2k + 1)x^2 + 3(k - 1)x + 1 - k = 0$

Por dato:

$x_1 + x_2 = 0{,}75$

$\dfrac{-3(k-1)}{2k+1} = 0{,}75$

$1 - k = 0{,}25(2k + 1)$

$1 - k = \dfrac{2k+1}{4}$

$4 - 4k = 2k + 1$

$3 = 6k$

$\therefore k = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

Clave E

16. Sea la ecuación:

$(m - 2)x^2 - (2m - 1)x + m - 1 = 0$ ...(1)

Del enunciado:

$\Delta = (2m - 1)^2 - 4(m - 2)(m - 1) = 25$

$4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 - 3m + 2) = 25$

$8m - 7 = 25$

$8m = 32$

$\Rightarrow m = 4$

Reemplazando $m = 4$ en la ecuación (1), tenemos:

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$2x \quad -1$

$x \quad -3$

$(2x - 1)(x - 3) = 0$

$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$

$x = \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x = 3$

Por lo tanto, la mayor solución es: 3

Clave A

17. De la ecuación:

$3x^2 - 2x + 1 = 0;$

$CS = \{m; n\}$

Sabemos que:

$m + n = -\dfrac{(-2)}{3} = \dfrac{2}{3}$ ...(I)

$mn = \dfrac{1}{3}$ ...(II)

$(I)^2$: $m^2 + \underbrace{2mn}_{\frac{1}{3}} + n^2 = \dfrac{4}{9}$

$m^2 + \dfrac{2}{3} + n^2 = \dfrac{4}{9}$

$m^2 + n^2 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{9}$

Nos piden:

$\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} = \dfrac{m^2+n^2}{mn} = \dfrac{\frac{-2}{9}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{-2}{3}$

Clave E

18. De la ecuación:

$x^2 - kx + 16 = 0$

Condición:

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{5}{8}$

$\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{5}{8}$ ...(I)

Sabemos que:

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{(-k)}{1} = k$
- $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{16}{1} = 16$

Reemplazando en (I):

$\dfrac{k}{16} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow k = 10$

Clave A

19. Dato:

$x_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} \quad \wedge \quad x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

Racionalizando:

$x_1 = \dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})} = 7 - \sqrt{42}$

$x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})} \times \dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = 7 + \sqrt{42}$

Luego:

$S = x_1 + x_2 = 14$

$P = x_1x_2 = (7 + \sqrt{42})(7 - \sqrt{42})$

$P = 49 - 42 = 7$

Nos piden:

$x^2 - Sx + P = 0$

$\therefore x^2 - 14x + 7 = 0$

Clave E

20. $\dfrac{(3-x)^3 + (4+x)^3}{(3-x)^2 + (4+x)^2} = 7$ ...(1)

Sea:

$n = 3 - x \quad \wedge \quad m = 4 + x$ ...(2)

$\Rightarrow n + m = 7$

Reemplazando (2) en (1):

$\dfrac{n^3 + m^3}{n^2 + m^2} = 7$

Entonces:

$(n + m)(n^2 - nm + m^2) = 7(n^2 + m^2)$

$(7)(n^2 - nm + m^2) = 7(n^2 + m^2)$

$\Rightarrow nm = 0$ ...(3)

De (2) en (3):

$(3 - x)(4 + x) = 0$

$\Rightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -4$

Por lo tanto, la mayor solución es: 3

Clave C

21. $1024x^2 - (m^n - 8)x + n^{10} = 0$

Del enunciado:

$x_1 + x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 \,.\, x_2 = 1$

Además: $m; n \in \mathbb{R}^+$

Luego: $x_1 \,.\, x_2 = 1$

$\dfrac{n^{10}}{1024} = 1 \Rightarrow n^{10} = 2^{10}$

$\Rightarrow n = 2$

$x_1 + x_2 = 0$

$\dfrac{m^n - 8}{1024} = 0 \Rightarrow m^2 - 8 = 0$

$m^2 = 8$

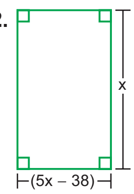
$\Rightarrow m = 2\sqrt{2}$

$\therefore m + n = 2(\sqrt{2} + 1)$

Clave C

Resolución de problemas

22.



$(5x - 38)x = 63$

$5x^2 - 38x - 63 = 0$

$5x \quad +7$

$x \quad -9$

$(5x + 7)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 9$

Base $= 5x - 38 = 5(9) - 38 = 7$ m

Altura $= x = 9$ m

Clave D

23. Sea x la edad de Javier

	Actual	Dentro de 4 años
Javier	x	x + 4

Dentro de 4 años

$(x + 4)^2 = 4((x + 4) + 8)$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4x - 32 = 0 \\ x \quad +8 \\ x \quad -4 \end{array}\right\} x = 4$

La edad de Javier es de 4 años.

Clave D

Nivel 3 (página 81) Unidad 3

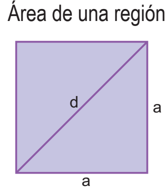
Comunicación matemática

24. Área de una región triangular equilátera ($S_\blacktriangle$):



$S_\blacktriangle = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

- Área de una región cuadrada ($S_\blacksquare$):



$S_\blacksquare = \dfrac{d^2}{2}$

A) (I)

Del enunciado: $d = 3\sqrt[4]{12}\,x$

Siendo:

x: lado del triángulo equilátero

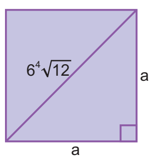
$S_{\blacktriangle} + S_{\blacksquare} = 37\sqrt{3}\ m^2$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(3\sqrt[4]{12})^2}{42} = 37\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{12}\,x^2}{2} = 37\sqrt{3} \qquad ...(1)$$

B) (I)

Desarrollando (1):



$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{18\sqrt{3}}{2}x^2 = 37\sqrt{3}$$

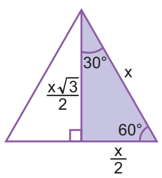
$$\frac{37\sqrt{3}}{4}x^2 = 37\sqrt{3}$$

$$x = 2\text{ m}$$

$$a\sqrt{2} = 6\sqrt[4]{12}$$

$$a = 3\sqrt[4]{48}\text{ m}$$

C) (C)



$$\text{Altura} = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ m}$$

Base = 2 m

25. La ecuación se puede escribir como:

$$5x^2 + 10x + 24 = 24\sqrt{x^2 + 2x + 12} \qquad ...(1)$$

Como:

$$x^2 + 2x + 12 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 12$$
$$= (x + 1)^2 + 11 > 0$$

Ya que el segundo miembro es positivo, hacemos la siguiente sustitución:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 12} = q > 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 12 = q^2$$

De (1):

$$5x^2 + 10x + 24 = 5(x^2 + 2x + 12) - 36$$
$$= 5q^2 - 36 \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$5q^2 - 36 = 24q$$
$$5q^2 - 24q - 36 = 0$$

5q +6
q −6

$$(5q + 6)(q - 6) = 0$$
$$5q + 6 = 0 \quad \vee \quad q - 6 = 0$$
$$q = -\frac{6}{5} \quad \vee \quad q = 6$$

(No cumple $q > 0$)

Único valor $q = 6$, en:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 12} = 6$$
$$x^2 + 2x + 12 = 36$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$(x - 4)(x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x = 4 \vee x = -6$$

I. (V)
La suma de estos elementos es:
$4 + (-6) = -2$

II. (F)

III. (V)
El producto de las raíces es: $4(-6) = -24$

IV. (F)
Las raíces no son recíprocas.

26.

Razonamiento y demostración

27. $x^2 - 2x - 8 = 0$; CS = {m; n}

Sabemos que:

$$m + n = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$mn = -\frac{8}{1} = -8$$

Luego:

$$x_1 = \frac{1}{m} + 1$$

$$x_2 = \frac{1}{n} + 1$$

$$S = x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$S = 2 + \frac{m + n}{mn}$$

Reemplazando:

$$S = 2 + \frac{2}{-8} = \frac{7}{4}$$

$$P = x_1x_2 = \left(\frac{1}{m} + 1\right)\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$P = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} + 1$$

$$P = \frac{m + n}{mn} + \frac{1}{mn} + 1$$

Reemplazando: $P = \dfrac{2 + 1}{-8} + 1 = \dfrac{5}{8}$

Nos piden: $x^2 - Sx + P = 0$

Luego: $x^2 - \dfrac{7}{4}x + \dfrac{5}{8} = 0$

$$\therefore 8x^2 - 14x + 5 = 0$$

Clave D

28. Del enunciado:

$$3\left(\frac{4x^2 - x + 1}{5(x^2 - x + 1)} - 1\right) + \frac{(x - 2)^2}{x^2 + x - 1} = 0$$

$$3\left(\frac{-x^2 + 4x - 4}{5(x^2 - x + 1)}\right) + \frac{(x - 2)^2}{x^2 + x - 1} = 0$$

$$(x - 2)^2\left(\frac{-3}{5(x^2 - x + 1)} + \frac{1}{x^2 + x - 1}\right) = 0$$

$$\frac{2(x - 2)^2(x - 2)^2}{5(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)} = 0$$

Entonces:

$$(x - 2)^4 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$\Rightarrow m = n = 2$$
$$\therefore A = m^n + n^m = 2^2 + 2^2 = 8$$

Clave D

29. $\left(1 - b + \dfrac{a^2}{2}\right)x^2 + a(1 + b)x + b(b - 1) + \dfrac{a^2}{2} = 0$

Del enunciado, se deduce:

$$\Delta = [a(1 + b)]^2 - 4\left(1 - b + \frac{a^2}{2}\right)\left(b(b - 1) + \frac{a^2}{2}\right) = 0$$

Desarrollando y factorizando:

$$(4b - a^2)[(b - 1)^2 + a^2] = 0$$

Si: $(b - 1)^2 + a^2 = 0$

$\Rightarrow b = 1 \ \wedge \ a = 0$

Pero, estos valores hacen que la ecuación original no sea cuadrática.

Entonces:

$$4b - a^2 = 0$$
$$\therefore \frac{a^2}{b} = 4$$

Clave D

30. Como 2 es una raíz de:

$$x^2 - (k - 3)x + k^2 + k - 16 = 0 \qquad ...(1)$$

Entonces:

$$(2)^2 - (k - 3)(2) + k^2 + k - 16 = 0$$
$$4 - 2k + 6 + k^2 + k - 16 = 0$$
$$k^2 - k - 6 = 0$$

k −3
k +2

$\Rightarrow k = 3 \ \vee \ k = -2$

Por dato: $k < 0$

$\Rightarrow k = -2$

Reemplazando $k = -2$ en (1):

$$x^2 - (-2 - 3)x + (-2)^2 + (-2) - 16 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

x +7
x −2

$\Rightarrow x = 2 \ \vee \ x = -7$

Por lo tanto, la otra raíz es: -7

Clave B

31. De la ecuación:

$$\left(\frac{1}{x + 3n} + \frac{1}{x + 4m}\right)(2x + 3n + 4m) = \frac{9}{2}$$

Sea: $a = x + 3n \ \wedge \ b = x + 4m$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) = \frac{9}{2}$$

$$\frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$$

2a −b
a −2b

$$\Rightarrow (2a - b)(a - 2b) = 0$$

Luego:

$2a - b = 0$

$2(x + 3n) - (x + 4m) = 0$

$\Rightarrow x = 4m - 6n$

$a - 2b = 0$

$(x + 3n) - 2(x + 4m) = 0$

$\Rightarrow x = 3n - 8m$

$\therefore CS = \{4m - 6n; 3n - 8m\}$

Clave E

32. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$x^2 + bx + c = 0$ ...(1)

Del enunciado:

$x_1 > 1 \wedge x_2 > 1$

$\Rightarrow x_1 - 1 > 0 \wedge x_2 - 1 > 0$ ...(2)

Además, de (1):

$x_1 + x_2 = -b \wedge x_1 . x_2 = c$

Por dato:

$S = b + c + 1$

$S = -x_1 - x_2 + x_1 . x_2 + 1$

$S = x_1(x_2 - 1) - (x_2 - 1)$

$S = (x_2 - 1)(x_1 - 1)$ ...(3)

De (2) y (3), se deduce que: $S > 0$

Clave C

33. Sea:

$ax^2 - bx + 4 = 0$; $CS = \{x_1; x_2\}$

Por dato:

$$x_1 = \frac{p^{15} + q^2 + 2}{p^{15} + 1} \wedge x_2 = \frac{p^{15} + q^2 + 2}{q^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{(p^{15} + 1) + (q^2 + 1)}{p^{15} + q^2 + 2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1$$

Luego:

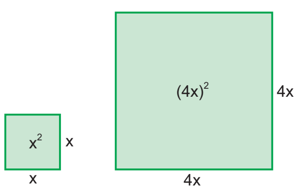
$$\frac{-\frac{(-b)}{a}}{\frac{4}{a}} = 1 \Rightarrow \frac{b}{4} = 1$$

$\therefore b = 4$

Clave E

Resolución de problemas

34.



$x^2 + (4x)^2 = 833$

$x = 7$ m

Los lados miden: $x = 7$ m y $4x = 4(7) = 28$ m

Clave A

35. Sea A la edad de Amelia.

$4(A - 2)(A + 6) = 36$

$A^2 + 4A - 21 = 0$

A ╳ −3

A ╳ +7

$(A - 3)(A + 7) = 0$

$A = 3 \vee A = -7$

La edad de Amelia es de 3 años.

Clave C

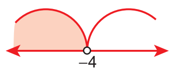
MARATÓN MATEMÁTICA (página 83) Unidad 3

1. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 4} - 1 > 0$

$$\frac{6 - 6x}{(x + 4)(x - 1)} > 0$$

$$\frac{x - 1}{(x + 4)(x - 1)} < 0$$

$$\frac{1}{x + 4} < 0 \wedge x \neq 1$$



$\Rightarrow x < -4$

$\therefore$ Máximo valor entero de x es: -3

Clave E

2. Recibe q puntos

$q =$ tiros acertados $-$ tiros fallados

$q = \underbrace{x . m}_{} - (p - x)n$

Siendo x: el número de tiros acertados

Resolvemos:

$q = xm - (p - x)n$

$$x = \frac{q + pn}{m + n}$$

Clave C

3. $y^x = 5^2 \Rightarrow y = 5^{2/x}$ ... (1)

$y^{\frac{2x + 3}{x - 1}} = 5^3$ ... (2)

(1) en (2):

$$5^{\frac{2}{x}\left(\frac{2x + 3}{x - 1}\right)} = 5^3$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}\left(\frac{2x + 3}{x - 1}\right) = 3$$

$4x + 6 = 3x^2 - 3x$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

x ╳ −3

3x ╳ 2

$\Rightarrow x = 3 \vee x = -\frac{2}{3}$

Clave D

4. Por Cardano:

$a + b + c = b$	$abc = -2a$
$a = -c$	$bc = -2$

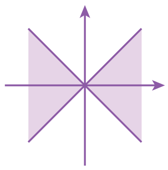
$\underbrace{ab}_{-c.-\frac{2}{c}} + \underbrace{bc}_{-2} + c.-c = c$

$$-c^2 = c$$
$$c = -1$$
$$\Rightarrow b = 2$$
$$a = 1$$
$$\Rightarrow 2a + 3b + c = 2 + 6 - 1 = 7$$

Clave E

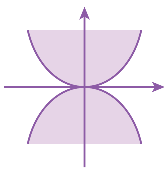
5. Graficamos: $|y| \leq |x|$

$-|x| \leq y \leq |x|$

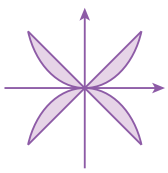


$|y| \geq x^2$

$y \geq x^2 \;\vee\; y \leq -x^2$



Intersecamos:



Clave C

6. Ordenamos:

$mx + y + 0z = 0$

$0x + my + z = 8$

$x + 0y + mz = m$

Para que admita infinitas soluciones:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$m(m^2 - 0) - 1(-1) = 0$$
$$m^3 + 1 = 0$$
$$\therefore\ m = -1$$

Clave A

7. $2 - |x| \geq 0$

$\Rightarrow x \in [-2; 2]$; cancelamos el factor $\sqrt{2 - |x|} \geq 0$

$$\frac{(1 - x^2)}{(|x + 3| + x - 1)(|x| - 2)} \geq 0$$

Para $x \in [-2; 0\rangle$ ...(1)

$$\frac{x^2 - 1}{(2x + 2)(-x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{x - 1}{x + 2} \geq 0\ ;\ x \neq -1$$

$x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup [1; +\infty\rangle$ ...(2)

$\Rightarrow CS_1 : \varnothing$

Para $x \in [0; 2]$ ...(3)

$$\frac{x^2 - 1}{(2x + 2)(x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{x - 1}{x - 2} \leq 0$$

$x \in [1; 2\rangle$ ...(4)

$\Rightarrow CS_2$: $[0; 1]$

CS: $CS_1 \cup CS_2 = [1; 2\rangle$

Clave B

8. Restricciones:

$\underbrace{4x + 2 > 0 \;\wedge\; 2 - 8x > 0}$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}$ ...(α)

$\log_5(4x + 2) > \log_5(2 - 8x) + \log_5 5^2$

$\log_5(4x + 2) > \log_5 25(2 - 8x)$

$4x + 2 > 50 - 200x$

$204x > 48$

$x > \frac{12}{51}$ ...(β)

Intersecamos: (α) y (β)

$$\underset{a}{\underline{\frac{12}{51}}} < x < \underset{b}{\underline{\frac{1}{4}}} \Rightarrow 17\left(\frac{12}{51}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

Clave B

9. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 25 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^T - A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -26 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & \frac{y - 2}{2} \\ w - 8 & \frac{z - 1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 0;\ y = 22;\ w = -18;\ z = 7$

$\therefore\ x + y + w + z = 11$

Clave B

10. $f_2 \leftarrow f_2 + f_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & x - 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \leq 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \leq 0$$

$$x - 2)x^3 + (-x + 2) \leq 0$$
$$(x - 2)(x^3 - 1) \leq 0$$
$$(x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$$
$$(x - 2)(x - 1) \leq 0$$
$$\Rightarrow x \in [1; 2]$$

Clave A

Unidad 4

INECUACIONES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 86) Unidad 4

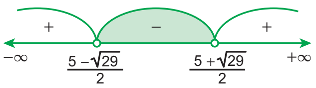
1. $x^2 - 5x - 1 < 0$

$x^2 - 2x\cdot\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 1 < 0$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} < 0$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 < 0$

$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right) < 0$

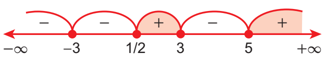


$\therefore CS = \left]\frac{5-\sqrt{29}}{2}; \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right[$

Clave A

2. $(x+3)^2(x-3)^5(2x-1)^2 \,.\, -1(2x-1)^9 \,.\, -1(x-5) \geq 0$

$(x+3)^2(x-3)^5(2x-1)^{11}(x-5) \geq 0$



Se mantiene el signo por tener el factor (x + 3) exponente par.

$\therefore CS = \left[\frac{1}{2}; 3\right] \cup [5; +\infty[\cup \{-3\}$

$2m + 1 = 2(-3) + 1 = -5$

Clave A

3. De la inecuación:

$P(x) = x^2 - kx + 4 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Por propiedad del trinomio positivo:

$(-k)^2 - 4(1)(4) \leq 0$

$k^2 \leq 16$

$-4 \leq k \leq 4$

$\Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Piden la suma de estos valores enteros:

$\therefore\ \Sigma$ valores $k = 0$

Clave E

4. De la inecuación:

$\sqrt[3]{x^3 - 7} < x - 1$

Elevando al cubo:

$x^3 - 7 < (x-1)^3$

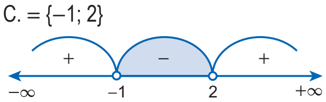
$x^3 - 7 < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$3x^2 - 3x - 6 < 0$

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x-2)(x+1) < 0$

P. C. = {–1; 2}



$\therefore\ x \in \langle -1; 2\rangle$

Clave D

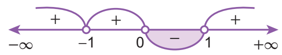
5. $x^6 + x^5 < x^4 + x^3$

$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 < 0$

$x^5(x+1) - x^3(x+1) < 0$

$x^3(x+1)(x^2-1) < 0$

$x^3(x+1)^2(x-1) < 0$



$\therefore\ CS = \langle 0; 1\rangle$

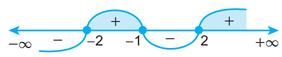
Clave B

6. $x^3 + x^2 \geq 4(x+1)$

$x^2(x+1) - 4(x+1) \geq 0$

$(x+1)(x^2-4) \geq 0$

$(x+1)(x-2)(x+2) \geq 0$



$\therefore\ CS = [-2; -1] \cup [2; +\infty\rangle$

Clave C

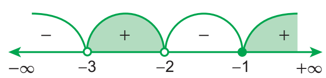
7. $\frac{x^2 + 7x + 8}{x^2 + 5x + 6} - 1 \geq 0$

$\frac{x^2 + 7x + 8 - x^2 - 5x - 6}{(x^2 + 5x + 6)} \geq 0$

Luego:

$\frac{2(x+1)}{(x+3)(x+2)} \geq 0 \ ; x \neq -3 \ \wedge \ x \neq -2$

$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} \geq 0$



$CS = \langle -3; -2\rangle \cup [-1; +\infty\rangle$

$\therefore$ Un intervalo es $[-1; +\infty\rangle$

Clave E

8. $\sqrt{x-4} \leq \sqrt{6-x}$ ...(1)

Analizando las raíces:

- $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ ...(2)
- $6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$ ...(3)

De (1):

$x - 4 \leq 6 - x$

$2x \leq 10$

$x \leq 5$ ...(4)

De (2), (3) y (4):

$\therefore\ CS = [4; 5]$

Clave A

9. La expresión a formar es:

$\frac{x+5}{x-2} = 1 + \frac{7}{x-2}$

Por condición tenemos:

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

$-\frac{7}{4} \leq x - 2 \leq -\frac{3}{4}$

$-\frac{4}{3} \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{4}{7}$

$-\frac{28}{3} \leq \frac{7}{x-2} \leq -4$

Sumando 1 obtenemos:

$\underbrace{-\frac{25}{3}}_{m} \leq 1 + \frac{7}{x-2} \leq \underbrace{-3}_{M}$

$\therefore m\,.\,M = \left(-\frac{25}{3}\right)(-3) = 25$

Clave C

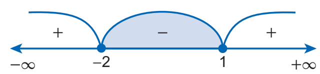
10. $\sqrt{2 - x - x^2} > -2010$

- Analizando dentro de la raíz:

$2 - x - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1) \leq 0$



$\therefore\ CS = [-2; 1]$

Clave D

11. $2(x-5) + \sqrt{5-x} > 5(3-x) + \sqrt{5-x} - 4$

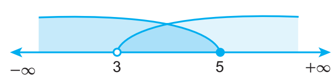
Analizando: $5 - x \geq 0 \ \Rightarrow \ x \leq 5$ ...(I)

Reduciendo:

$2x - 10 > 15 - 5x - 4$

$7x > 21 \Rightarrow x > 3$ ...(II)

(I) ∩ (II):



$\therefore x \in \langle 3; 5]$

Clave C

12. $\frac{x-1}{x+2} \in A$

$1 - \frac{3}{x+2} \in A$

Como:

$x \in [-1; 2]$

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 2$

$1 \leq x + 2 \leq 4$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+2} \leq 1$

$-\frac{3}{4} \geq \frac{-3}{x+2} \geq -3$

$\frac{1}{4} \geq 1 - \frac{3}{x+2} \geq -2$

$\Rightarrow A = \left[-2; \frac{1}{4}\right]$

$\Rightarrow$ mín. $= -2 \wedge$ máx. $= \frac{1}{4}$

Por lo tanto: el producto de su máximo y mínimo valor es $-\frac{1}{2}$.

Clave A

13. $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < 7 - x$

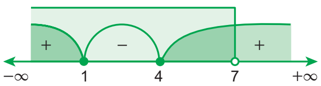
Analizando:

$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad \wedge \ 7 - x > 0$

$x \quad -4$
$x \quad -1$

$(x - 4)(x - 1) \geq 0 \ \wedge \ x < 7$

Puntos críticos: 1 y 4



Luego de intersectar:

$x \in \langle -\infty; 1] \cup [4; 7\rangle \qquad ...(S_1)$

Resolviendo: $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < 7 - x$

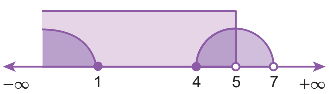
Elevando al cuadrado:

$x^2 - 5x + 4 < 49 - 14x + x^2$

$9x < 45$

$x < 5 \qquad ...(S_2)$

Luego $S_1 \cap S_2$:



$\therefore$ CS $= \langle -\infty; 1] \cup [4; 5\rangle$

Clave E

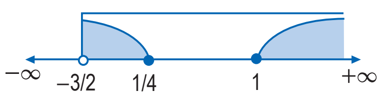
14. $2x + 3 > \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$

Para $x < 7 \qquad ...(S_1)$

Restringimos:

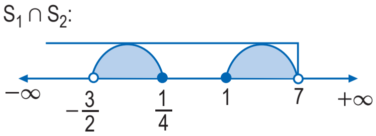
$4x^2 - 5x + 1 \geq 0 \wedge 2x + 3 > 0$

$(4x - 1)(x - 1) \geq 0 \wedge x > -3/2$



$x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[1; +\infty\right\rangle \qquad ...(S_2)$

$S_1 \cap S_2$:



$x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right] \cup \left[1; 7\right\rangle$

Piden soluciones enteras menores que siete:

$x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

n.° de soluciones = 8

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 88) Unidad 4

Comunicación matemática

1. Dada la ecuación:

$3x^2 + 2(a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 0$

Donde: $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq b \neq c$

Analizando el discriminante:

$[2(a + b + c)]^2 - 4(3)(a^2 + b^2 + c^2)$

Desarrollando se obtiene:

$-8[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac]$

Se cumple:

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Entonces:

$$-8\underbrace{[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac]}_{\text{positivo}}$$

$-8[\text{positivo}] < 0$

$\therefore$ Se concluye que las raíces son imaginarias.

Clave A

2. $T = \left\{x - 1/\sqrt{4x - 3} - \sqrt{2 - x} > 0\right\}$

$\sqrt{4x - 3} > \sqrt{2 - x} \qquad ...(1)$

$4x - 3 > 2 - x$

$5x > 5 \Rightarrow x > 1 \qquad ...(2)$

Además de (1):

- $2 - x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x \qquad ...(3)$
- $4x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{4} \qquad ...(4)$

De (2); (3) y (4):

$\Rightarrow x \in \langle 1; 2]$

$\therefore T = \langle 0; 1]$

Clave B

Razonamiento y demostración

3. $x^2 - 5x + 1 \leq 0$

Sumamos $\frac{21}{4}$ en ambos miembros:

$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + 1 + \frac{21}{4} \leq \frac{21}{4}$

Dando forma:

$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{21}{4}$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \leq \frac{21}{4}$

Sacamos raíz cuadrada:

$-\frac{\sqrt{21}}{2} \leq x - \frac{5}{2} \leq \frac{\sqrt{21}}{2}$

Sumamos $\frac{5}{2}$:

$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$

$\therefore x \in \left[\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right]$

Clave C

4. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} > 1$

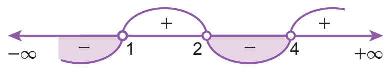
$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} - 1 > 0$

Reduciendo:

$\frac{-2x + 4}{(x - 2)(x - 1)} > 0 \Rightarrow \frac{-2(x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} > 0$

$\frac{x - 4}{(x - 2)(x - 1)} < 0 \wedge x \neq \{1; 2\}$

Puntos críticos: {1; 2; 4}



$x \in \langle -\infty; 1\rangle \Longleftrightarrow \langle 2; 4\rangle$

$\therefore$ Un intervalo solución es: $\langle -\infty; 1\rangle$

Clave A

5. Dada la inecuación:

$ax^2 + bx + c \leq 0; \ x \in [-4; -3]$

Construimos la inecuación:

$(x + 4)(x + 3) \leq 0$

$x^2 + 7x + 12 \leq 0$

Como a, b y c son mínimos enteros; entonces la ecuación obtenida es igual a la inicial.

$\therefore$ a = 1; b = 7 y c = 12

Piden:

$a + b + c = 1 + 7 + 12 = 20$

Clave E

6. De la ecuación:

$P(x) = -x^2 + 4x + 4n$

Dato:

$-x^2 + 4x + 4n < 5; \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 - 4x - 4n + 5 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Se cumple:

$(-4)^2 - 4(1)(-4n + 5) < 0$

$16 < 4(5 - 4n)$

$n < \frac{1}{4}$

$\therefore n \in \left\langle -\infty; \frac{1}{4}\right\rangle$

Clave A

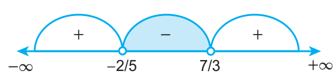
7. Resolviendo:

$15x^2 - 29x - 14 < 0$

$(5x + 2)(3x - 7) < 0$

Puntos de corte:

$PC = \left\{-\frac{2}{5}; \frac{7}{3}\right\}$



$x \in \left\langle -\frac{2}{5}; \frac{7}{3}\right\rangle = \langle a; b\rangle$

Piden:

$a + b + \frac{1}{15} = -\frac{2}{5} + \frac{7}{3} + \frac{1}{15} = 2$

Clave A

8. Dada la inecuación:

$$x^2+\frac{2}{x}<3$$

$$\frac{x^3+2}{x}-3<0$$

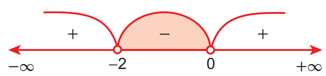
$$\frac{x^3-3x+2}{x}<0$$

Factorizando:

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{x}<0;\ x\neq\{0;1\}$$

$$\frac{x+2}{x}<0$$

$\Rightarrow x(x+2)<0;\ x\neq\{0;1\}$



$CS=\langle -2;0\rangle$

Luego en $\langle -2;0\rangle$ se tiene una solución entera, esta es: -1.

Clave D

9. $\sqrt{3x^2-6x+8}>-4$ ...(I)

Analizando:

$3x^2-6x+8\geq 0$

$3(x^2-2x+1)+5\geq 0$

$3(x-1)^2+5\geq 0$ ...(II)

Se observa que $x\in\mathbb{R}$.

Redefiniendo de (I):

$\sqrt{3x^2-6x+8}\geq 0$

$\Rightarrow 3x^2-6x+8\geq 0$

Igual a (II): $x\in\mathbb{R}$

$\therefore x\in\mathbb{R}$

Clave B

10. Resolviendo:

$$x+\frac{1}{x}>1$$

$$\frac{x^2+1}{x}-1>0\ \wedge\ x\neq 0$$

$$\frac{x^2-x+1}{x}>0\ \wedge\ x\neq 0$$

Analizamos el discriminante de x^2-x+1

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(1)=-3<0$

$\Rightarrow x^2-x+1>0,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

Luego:

$$\frac{x^2-x+1}{x}>0\Rightarrow\frac{1}{x}>0\Rightarrow x>0$$

Luego:

$CS=\langle 0;+\infty\rangle$

$\therefore$ La menor solución entera es: 1

Clave B

11. Resolviendo:

$$\sqrt[3]{x^3+1}>x+1$$

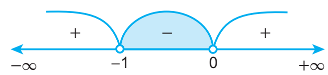
Elevando al cubo:

$x^3+1>x^3+3x^2+3x+1$

$3x^2+3x<0$

$3x(x+1)<0\Rightarrow x(x+1)<0$

Puntos críticos: -1 y 0



$\therefore\ CS=\langle -1;0\rangle$

Clave C

12. De la inecuación:

$$\frac{\sqrt[3]{ax+1}}{x\sqrt[5]{x+b}}\leq 0;\ \ a>b>1$$

Nota: como los índices de los radicales son impares, para la resolución de este tipo de inecuaciones no se requiere hacer restricciones a la incógnita.

Entonces, todo a la quince para eliminar radicales:

$$\frac{(ax+1)^5}{x^{15}(x+b)^3}\leq 0$$

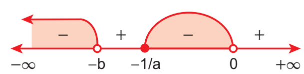
$$\frac{(ax+1)^4(ax+1)}{x^{14}.x(x+b)^2(x+b)}\leq 0$$

Se eliminan todos los términos positivos:

$$\Rightarrow\frac{ax+1}{x(x+b)}\leq 0;\ \ a>b>1\Rightarrow\frac{1}{a}<b\Rightarrow -b<\frac{-1}{a}<0$$

Puntos de corte:

$$\text{P.C.}=\left\{-b;\frac{-1}{a};0\right\}$$



$\therefore\ x\in\langle -\infty;-b\rangle\cup\left[-\frac{1}{a};0\right\rangle$

Clave E

13. De acuerdo con el método de los puntos de corte procedemos de la manera siguiente:

$x^4-10x^2+9\leq 0\Rightarrow(x^2-9)(x^2-1)\leq 0$ ...(1)

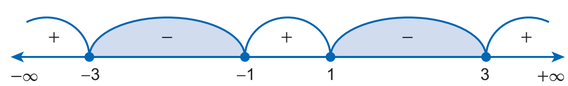
x^2 $\quad -9$

x^2 $\quad -1$

De (1) se tiene:

$(x-3)(x+3)(x+1)(x-1)\leq 0$

Los puntos críticos son: $-3;-1;1;3$



$\Rightarrow CS=[-3;-1]\Leftrightarrow[1;3]$

$\Rightarrow a=-3,\ b=-1,\ c=1$ y $d=3$

$\therefore\ a-b+c-d=-4$

Clave A

Resolución de problemas

14. Del enunciado:

$6x + 15 \geq 4x + 77 \Rightarrow x \geq 31$ ...(1)

$3x - 22 \leq 89 \Rightarrow x \leq 37$ ...(2)

Luego de (1) y (2):

$31 \leq x \leq 37$

Los valores que puede adoptar x:

31; 32, 33; 34; 35; 36; 37 (7 soluciones)

Clave C

15. Sea:

C el número de calculadora HP50G$^+$ que tenía Estela.

Según la lectura:

- Estela vende 350 calculadoras
  $\Rightarrow$ Quedan = C – 350

Luego: $C - 350 > C/2$

$C > 700$ ...(1)

- Luego vende 200 calculadoras
  $\Rightarrow (C - 350) - 200 < 152$

$C < 702$ ...(2)

De (1) y (2): $700 < C < 702$

$C \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow C = 701$

Luego, Estela tenía 701 calculadoras HP50G$^+$.

Clave A

Nivel 2 (página 88) Unidad 4

Comunicación matemática

16.

17. Del enunciado:

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < -1 \Rightarrow 0 > a > b > -1$

I. $a + 1 > b + 1 > 0$

$(a + 1)^2 > (b + 1)^2$ (V)

II. $a^2 > 0;\ b^3 < 0$

$\Rightarrow a^2 > b^3$ (V)

III. $a > b$

$a^3 > b^3 \Rightarrow a^3 - b^3 > 0$ (V)

Clave D

Razonamiento y demostración

18. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 50 \leq 4(3x + 6y + 10z)$

$4x^2 - 12x + 9y^2 - 24y + 16z^2 - 40z + 50 \leq 0$

$(2x - 3)^2 + (3y - 4)^2 + (4z - 5)^2 \leq 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2};\ y = \frac{4}{3};\ z = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow T = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = 2 + 1{,}25$

$\therefore T = 3{,}25$

Clave C

19. $\frac{x-b}{x-a} < \frac{a}{b}$; $(x \neq a)$

Resolviendo:

$$\frac{x-b}{x-a} - \frac{a}{b} < 0$$

$$\frac{xb - b^2 - ax + a^2}{(x-a)b} < 0$$

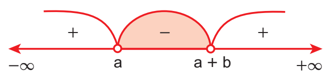
$$\frac{x(b-a) - (b^2 - a^2)}{(x-a)b} < 0$$

$$\frac{x(b-a) - (b-a)(b+a)}{(x-a)b} < 0$$

$$\frac{(b-a)(x-b-a)}{(x-a)b} < 0 \quad ...(1)$$

Como: $0 < a < b \Rightarrow b - a > 0$

Luego, de (1): $\frac{x-b-a}{x-a} < 0$



$\therefore\ x \in \langle a; a + b\rangle$

Clave D

20. $2x - 1 > \sqrt{3x^2 - x + 1}$

Se cumple: $3x^2 - x + 1 \geq 0$

Analizando el discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(1) = -11 < 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$ ...(S$_1$)

Además:

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ...(α)

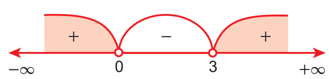
Resolviendo: $2x - 1 > \sqrt{3x^2 - x + 1}$

Elevando al cuadrado:

$4x^2 - 4x + 1 > 3x^2 - x + 1$

$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0$

Puntos críticos: 0 y 3



$x \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ ...(β)

$(\alpha) \cap (\beta)$:

$x \in \langle 3; +\infty\rangle$ ...(S$_2$)

$CS = S_1 \cap S_2$

$CS = \mathbb{R} \cap \langle 3; +\infty\rangle = \langle 3; +\infty\rangle$

Clave D

21. $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} \leq 0$

$$\frac{x^2 + 2x - 3x + 6}{(x-2)(x+2)} \leq 0,\ x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2$$

$$\frac{x^2 - x + 6}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \quad ...(1)$$

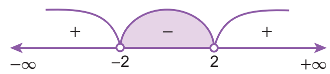
Analizando: $x^2 - x + 6$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(6) = -23 < 0$

$\Rightarrow x^2 - x + 6 > 0$

De (1):

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$



$\therefore\ CS = \langle -2; 2\rangle$

Clave A

22. $\sqrt{2x - 3} > \sqrt{2 - x}$

Analizando:

$2x - 3 > 0 \ \wedge \ 2 - x \geq 0$

$x > \frac{3}{2} \ \wedge \ x \leq 2$

$\Rightarrow x \in \left\langle \frac{3}{2}; 2\right]$ ...(S$_1$)

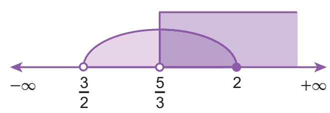
Resolviendo: $\sqrt{2x - 3} > \sqrt{2 - x}$

Elevando al cuadrado:

$2x - 3 > 2 - x$

$3x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$ ...(S$_2$)

Luego $S_1 \cap S_2$:



$\therefore\ CS = \left\langle \frac{5}{3};\ 2\right]$

Clave B

23. $x + \frac{y^2}{25x} + 10\frac{z^2}{y} + \frac{1}{z} = S$

$$4S = 4x + \frac{4y^2}{25x} + \frac{40z^2}{y} + \frac{4}{z}$$

$$\frac{4S}{8} = \frac{4x + \frac{4y^2}{25x} + \frac{20z^2}{y} + \frac{20z^2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}}{8} \geq MG$$

$$\frac{S}{2} \geq \sqrt[8]{4x \cdot \frac{4y^2}{25x} \cdot \frac{20z^2}{y} \cdot \frac{20z^2}{y} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z}}$$

$$\frac{S}{2} \geq \sqrt[8]{\frac{4^2 \cdot 20^2}{25}} = \sqrt[8]{256} = 2$$

$\therefore S \geq 4$

Clave B

24. De la inecuación:

$(a^2 + b^2)x^2 - (a + b)x + 1 < 0;\ a < 0 < b$

Analizamos el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$

$[-(a + b)]^2 - 4(a^2 + b^2)$

$a^2 + b^2 + 2ab - 4(a^2 + b^2)$

$\underbrace{2ab}_{(-)} - 3\underbrace{(a^2+b^2)}_{(+)}$; $a < 0 < b$

$\Rightarrow \quad \Delta < 0$

No tiene soluciones reales: $x \in \varnothing$
Por lo tanto, el número de elementos del CS es 0.

Clave E

25. De la inecuación:

$\frac{x-b}{x-a} < \frac{a}{b}$; $0 < a < b$

Resolviendo:

$$\frac{x-b}{x-a} - \frac{a}{b} < 0$$

$$\frac{bx - b^2 - ax + a^2}{b(x-a)} < 0$$

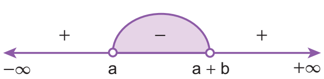
$$\frac{(b-a)x - (b+a)(b-a)}{b(x-a)} < 0$$

$$\frac{(b-a)(x-b-a)}{b(x-a)} < 0;\ b-a>0$$

$$\frac{x-b-a}{(x-a)} < 0 \ \wedge \ x-a \neq 0$$

$\Rightarrow \ (x-b-a)(x-a) < 0 \ \wedge \ x \neq a$

P.C. = $\{a; a+b\}$



$\therefore \ x \in \langle a; a+b\rangle$

Clave C

26. Sabemos que:

$[(x-1)-1]^2 \geq 0$
$(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 \geq 0$
$(x-1)^2 + 1 \geq 2(x-1)$

Dividimos entre $(x-1)$:

$x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$

$x + \frac{1}{x-1} \geq 3$

Invirtiendo:

$0 < \frac{1}{\underbrace{x + \frac{1}{x-1}}_{M}} \leq \frac{1}{3}$

$\therefore \ M \in \langle 0; \frac{1}{3}]$

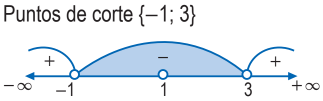
Clave C

27. $(x-1)^2(x+1)(x-3)^3 < 0$

$\underbrace{(x-1)^2}_{\mathbb{R}-\{1\}} (x+1)(x-3)^2(x-3) < 0$

$(x+1)(x-3) < 0 \wedge x \neq 1$

Puntos de corte $\{-1; 3\}$



$x \in \langle -1; 3\rangle - \{1\}$ ...(I)

Dato:
$x \in \langle a; b\rangle - \{c\}$ ...(II)

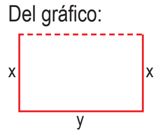
(I) = (II), entonces:
$a = -1$; $b = 3$; $c = 1$

Nos piden:
$a^b + 2c = (-1)^3 + 2(1) = 1$

Clave D

Resolución de problemas

28. Del gráfico:



$A(x; y) = xy$
$2x + y = 1000$

Luego:
$A(x) = x(1000 - 2x)$
$A(x) = 1000x - 2x^2$

Derivando e igualando a cero:
$A'(x) = 1000 - 4x = 0$
$x = 250$

Entonces:
$A(250) = 125\ 000\ m^2$

Clave E

29. Asumimos:

T la edad del tío y
S la edad del sobrino

Según el enunciado
$T - S > 25$ ...(1)
$2(S-5) > T - 5 \Rightarrow 2S - 10 > T - 5$
$2S - T > 5$ ...(2)
Dato: $S < 33$ ...(3)

Sumando las desigualdades (1) y (2):
$S > 30$ ...(4)
De (3) y (4): $30 < S < 33$
$\Rightarrow S = 31$ o 32

- Si $S = 31$:
  En (1): $T - 31 > 25 \Rightarrow T > 56$
  En (2): $2(31) - T > 5 \Rightarrow 57 > T$
  $56 < T < 57$

No hay algún valor entero para T.

- Si $S = 32$:
  En (1): $T - 32 > 25 \Rightarrow T > 57$
  En (2): $2(32) - T > 5 \Rightarrow T < 59$
  $57 < T < 59$
  $T = 58$

Por lo tanto, la edad del tío es de 58 años.

Clave C

Nivel 3 (página 89) Unidad 4

Comunicación matemática

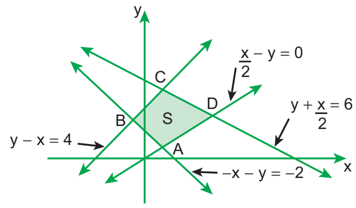
30. "Al minimizar f(x; y) sobre S se afirma que"

* S es la región limitada por:

$y - x \leq 4 \qquad y + \frac{x}{2} \leq 6$

$\frac{x}{2} - y \leq 0 \qquad -x - y \leq -2$

Graficando la región S:



Luego de intersecar las rectas, obtenemos los puntos:

$A = \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $B = (-1; 3)$,

$C = \left(\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$, $D = (6; 3)$

Para minimizar f(x; y), definidas en las alternativas, evaluamos f en los puntos A, B, C y D.

Veamos:

A) Si $f(x; y) = x + y$
$f(A) = 2$, $f(B) = 2$, $f(C) = \frac{20}{3}$ y $f(D) = 9$
Como $f(A) = f(B) = 2$, entonces el mínimo valor de f se encuentra en todos los puntos de $\overline{AB}$, se tendrían infinitas soluciones.
Luego, A) es falsa.

B) Si $f(x; y) = y - x$
$f(A) = \frac{-2}{3}$, $f(B) = 4$, $f(C) = 4$ y $f(D) = -3$
Entonces el mínimo valor de f se encuentra en el punto $D = (6, 3)$ y o en $\left[\frac{24}{13}; \frac{16}{3}\right]$
Luego, B) es falsa.

C) Si $f(x; y) = \frac{x}{2} + y$
$f(A) = \frac{4}{3}$, $f(B) = \frac{5}{2}$, $f(C) = 6$ y $f(D) = 6$
Entonces, el mínimo valor de f se encuentra en el punto $A = \left[\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right]$ y no en (2; 0).
Luego, C) es falsa.

D) Si $f(x; y) = \frac{x}{2} - y$
$f(A) = 0$, $f(B) = -\frac{7}{2}$, $f(C) = -6$ y $f(D) = 0$
Entonces, el mínimo valor de f se encuentra en el punto $C = \left[\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right]$; por lo que se tendría una solución y no infinitas.
Luego, D) es falsa.

E) Si $f(x; y) = y - \frac{x}{2}$
$f(A) = 0$, $f(B) = \frac{7}{2}$, $f(C) = \frac{14}{3}$ y $f(D) = 0$
Como $f(A) = f(D) = 0$, entonces el mínimo valor de f se encuentra en todos los puntos de $\overline{AD}$; por lo que se tendrían infinitas soluciones, pero (6; 3) es solución.
$\therefore$ E) es verdadera.

Clave E

31.

Razonamiento y demostración

32. Dato:

$x \in \langle a; b] \cup \langle c; +\infty\rangle$ ...(I)

Resolviendo:

$\dfrac{x+1}{x-1} \geq \dfrac{x-1}{x+1}$

$\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0;\ x-1 \neq 0 \wedge x+1 \neq 0$

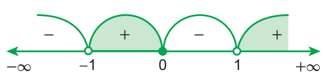
$\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0;\ x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)} \geq 0;\ x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$x(x-1)(x+1) \geq 0 \ \wedge\ x \neq \{-1; 1\}$

Puntos críticos: -1; 0 y 1

(Tener en cuenta que x sí puede tomar el valor de 0).



$x \in \langle -1; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle$ ...(II)

De (I) y (II):
$a = -1;\ b = 0$ y $c = 1$

Nos piden: $a + b + c = -1 + 0 + 1 = 0$

Clave B

33. $\dfrac{\sqrt{9-x^2}(x+1)}{x+2} > 0$

Analizando:

$9 - x^2 > 0 \quad \wedge \quad x + 2 \neq 0$
$x^2 < 9 \quad \wedge \quad x \neq -2$
$-3 < x < 3 \quad \wedge \quad x \neq -2$ ...(S_1)

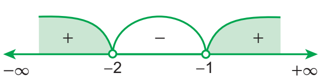
Resolviendo:

$\dfrac{\sqrt{9-x^2}(x+1)}{x+2} > 0$

Luego: $\dfrac{x+1}{x+2} > 0$

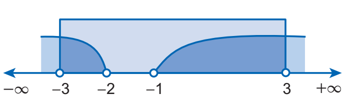
$\Rightarrow (x+1)(x+2) > 0;\ x \neq -2$

Puntos críticos: -2; -1



$x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$ ...(S_2)

Luego: $S_1 \cap S_2$



$\therefore\ CS = \langle -3; -2\rangle \cup \langle -1; 3\rangle$

Clave B

34. Dato:

$CS = \langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty\rangle$ ...(I)

$\dfrac{2x+1}{x+1} > \dfrac{x+2}{2-x}$

$\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x+1} + \dfrac{x+2}{x-2} > 0$

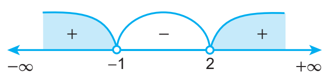
Efectuando se tiene:

$\dfrac{3x^2}{(x+1)(x-2)} > 0 \quad \wedge \quad x \neq \{-1; 2\}$

$3x^2(x+1)(x-2) > 0 \quad \wedge \quad x \neq \{-1; 2\}$

$(x+1)(x-2) > 0 \quad \wedge \quad x \neq \{-1; 2\}$

Puntos críticos: -1 y 2



$CS = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$ ...(II)

De (I) y (II):
Identificando $a = -1$ y $b = 2$.
Nos piden: $a^b = (-1)^2 = 1$

Clave C

35. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x}} \geq \sqrt[3]{x-10}$ ...(1)

De (1) se tiene:

- $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$ ...(2)
- $\sqrt{x^2-6x} \Rightarrow x(x-6) \geq 0$

$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 0] \cup [6; +\infty\rangle$ ...(3)

- $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x}}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-6x}-\sqrt{x}}{8-x} \geq 0;\ x \neq 8$

$\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x-6}-1)}{8-x} \geq 0$

$x \geq 0 \ \wedge\ \dfrac{\sqrt{x-6}-1}{8-x} \geq 0$ ...(4)

De (4) se tiene dos casos:

- $\sqrt{x-6} - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad 8 - x > 0$
  $x \geq 7 \qquad\qquad 8 > x$
  $\Rightarrow x \in [7; 8\rangle \cup \{0\}$ ...(5)
- $\sqrt{x-6} - 1 \leq 0 \quad \wedge \quad 8 - x < 0$
  $x \leq 7 \qquad\qquad 8 < x$

$\Rightarrow CS = \varnothing$ ...(6)

De (2), (3), (5) y (6):

$\Rightarrow CS_2 \cap CS_3 \cap \{CS_5 \cup CS_6\}$

$\Rightarrow CS = [7; 8\rangle \cup \{0\}$

Clave A

36. $mx^2 - 2mx + m + m + 1 < 0$ ...(1)

$m(x-1)^2 + m + 1 < 0$
$m\underbrace{[(x-1)^2+1]}_{(+)} + 1 < 0$

$\Rightarrow m < 0$ ...(2)

De (1) multiplicando por -1:

$\underbrace{(-m)}_{>0}x^2 + 2mx - (2m+1) > 0$

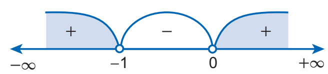
$\Rightarrow \Delta = (2m)^2 - 4(-m) \cdot -(2m+1) < 0$

$4m^2 < 4m(2m+1)$

$4m(m - 2m - 1) < 0$

$m(-m-1) < 0$

$m(m+1) > 0$



$\Rightarrow m \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$ ...(3)

De (2) y (3):
$\therefore\ m \in \langle -\infty; -1\rangle$

Clave C

37. De la inecuación:

$7m^2 - 3x > x^2$

$x^2 + 3x - 7m^2 < 0$ ...(I)

Dato:

$-7 < x < 4$

$-7 + \dfrac{3}{2} < x + \dfrac{3}{2} < 4 + \dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{11}{2} < x + \dfrac{3}{2} < \dfrac{11}{2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 + 3x + \dfrac{9}{4} < \dfrac{121}{4}$

$x^2 + 3x - 28 < 0$ ...(II)

(I) = (II), entonces:
$7m^2 = 28 \Rightarrow m^2 = 4$
$m = \pm 2$

$\therefore$ Un valor de m es 2.

Clave D

38. $\dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{2}{\underline{|3}} + \dfrac{3}{\underline{|4}} + ... \dfrac{n}{\underline{|n+1}} \leq \dfrac{5039}{5040}$ ...(I)

Transformando cada fracción:

$\dfrac{1}{\underline{|2}} = \dfrac{2-1}{\underline{|2}} = \dfrac{2}{\underline{|2}} - \dfrac{1}{\underline{|2}} = \dfrac{1}{\underline{|1}} - \dfrac{1}{\underline{|2}}$

$\dfrac{2}{\underline{|3}} = \dfrac{3-1}{\underline{|3}} = \dfrac{3}{\underline{|3}} - \dfrac{1}{\underline{|3}} = \dfrac{1}{\underline{|2}} - \dfrac{1}{\underline{|3}}$

$\dfrac{3}{\underline{|4}} = \dfrac{1}{\underline{|3}} - \dfrac{1}{\underline{|4}}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\dfrac{n}{\underline{|n+1}} = \dfrac{1}{\underline{|n}} - \dfrac{1}{\underline{|n+1}}$

Sumando:

$\dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{2}{\underline{|3}} + \dfrac{3}{\underline{|4}} + ... + \dfrac{n}{\underline{|n+1}} = 1 - \dfrac{1}{\underline{|n+1}}$

Luego en (I):

$$1-\frac{1}{\underline{|n+1}}\leq\frac{5039}{5040}$$

$$1-\frac{1}{\underline{|n+1}}\leq 1-\frac{1}{\underline{|7}}$$

$\underline{|n+1} \leq 7 \Rightarrow n+1 \leq 7$

$n \leq 6$

$\therefore\ n_{máx.} = 6$

Clave D

39. $2x^2 - 4x - 2k > 1;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

$2x^2 - 4x - (2k+1) > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Recordar:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

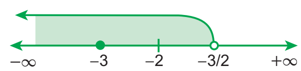
En el problema:

$(-4)^2 - 4(2)[-(2k+1)] < 0$

$16 + 8(2k+1) < 0$

$2k + 1 < -2$

$k < \frac{-3}{2}$



$k_{entero\ máximo} = -2$

Clave B

40. Factorizando se tiene:

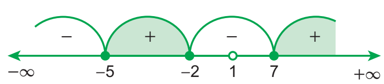
$$\frac{(x-7)(x+5)(x+2)(x-1)\overbrace{(x^2+x+1)}^{(+)}}{\underbrace{(x^2+2)}_{(+)}(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{(+)}} \geq 0$$

Entonces:

$(x-7)(x+5)(x+2) \geq 0;\ x \neq 1$

Puntos críticos: $\{-5; -2; 7\};\ x \neq 1$

En la recta real:



$x \in [-5; -2] \cap [7; +\infty\rangle$

Piden soluciones negativas:

$\therefore x \in [-5; -2]$

Clave A

41. Resolución:

$3^{x+4+x-4} - 3^{x+4} < 3^x - 81$

$3^{2x} - 3^x . 3^4 - 3^x + 81 < 0$

$3^{2x} - 82 . 3^x + 81 < 0$ (Sea $y = 3^x$)

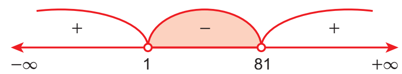
$\Rightarrow\ y^2 - 82y + 81 < 0$

$y \quad -81$

$y \quad -1$

$\Rightarrow (y-81)(y-1) < 0$

Los puntos críticos son: 1 y 81



$\Rightarrow\ y = 3^x \in \langle 1; 81\rangle \Leftrightarrow 1 < 3^x < 81$

$3^0 < 3^x < 3^4 \Rightarrow x \in \langle 0; 4\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

42. Asumimos que:

Javier: tiene x hijos
César: tiene y hijos
Eduardo: tiene z hijos

Según el enunciado:

$x + y < 6$ ...(1)
$y > z$ ...(2)
$x - 1 > z$ ...(3)

Sumando (2) + (3):

$y + x > 2z + 1$ ...(4)

Multiplicando por (−1) a la inecuación (1):

$-x - y > -6$ ...(5)

Sumando (4) + (5):

$0 > 2z - 5$

$z < 2{,}5$ ...(6)

De (6): z = 1 ó 2

- Si z = 1
  En (2) $y > 1\ \Rightarrow\ y = 2; 3; 4; 5$
  En (3) $x - 1 > 1\ \Rightarrow\ x > 2\ \Rightarrow\ x = 3; 4; 5$
  En (1): $x + y < 6$, solo cumple cuando:
  $y = 2 \wedge x = 3$

Luego: $x + y + z = 3 + 2 + 1 = 6$ ...(7)

- Si z = 2:
  En (2): $y > z\ \Rightarrow\ y > 2\ \Rightarrow\ y = 3; 4; 5$
  En (3): $x - 1 > z\ \Rightarrow\ x > 3\ \Rightarrow\ x = 4; 5$
  En (1): $x + y < 6$, no cumple con esta desigualdad ...(8)

Observando (7) y (8) se concluye:

$x = 3;\ y = 2;\ z = 1$

$x + y + z = 6$ hijos

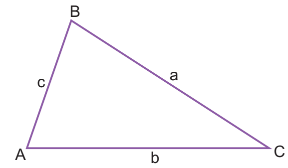
Clase D

43. Sean los lados del triángulo a; b y c según el enunciado:

$c = m;\ b = mq$ y $a = mq^2$

Siendo q la razón geométrica.

Por geometría:



$|a - c| < b < a + c$

I. $mq^2 - m < mq < mq^2 + m$
(si: $a \geq c\ \Rightarrow\ q \geq 1$)

II. $m - mq^2 < mq < mq^2 + m$
si: $a < c\ \Rightarrow\ 0 < q < 1$

Como: $m > 0$; se tiene:

De (I):

$q^2 - 1 < q < q^2 + 1$

$q^2 - q - 1 < 0 \quad \wedge \quad q^2 - q + 1 > 0$

$$\left[q-\frac{1}{2}\right]^2 < \frac{5}{4} \quad \wedge \quad \left[q-\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} < q - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \wedge \quad q \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Como $q \geq 1$ se tiene: $1 \leq q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ...(1)

De (II):

Si $q < 1\ \Rightarrow\ 1 - q^2 < q < q^2 + 1$

$\Rightarrow\ q^2 + q - 1 > 0\ \wedge\ q^2 - q + 1 > 0$

$(q + 1/2)^2 > 5/4\ \wedge\ (q - 1/2)^2 + 3/4 > 0$

$q > 0\ \Rightarrow\ q + \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2} \wedge q \in \mathbb{R}$

$q > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Como: $q < 1$, se tiene:

$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$ ...(2)

(1) ∪ (2):

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Cambiamos q por r: razón geométrica.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Clave E

FUNCIONES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 91) Unidad 4

1. $f = \{(1; 5); (1; b - a^2); (3; a + 4)\}$

Dato: $f^2(3) = 81 \Rightarrow f(3) = \pm 9$

Si f es función, se cumple:

$b - a^2 = 5 \quad ...(I)$

Además: $f(3) = a + 4$

- Si: $f(3) = 9 \Rightarrow a + 4 = 9$
  $a = 5$
  En (I): $b - 5^2 = 5 \Rightarrow b = 30$
- Si: $f(3) = -9 \Rightarrow a + 4 = -9$
  $a = -13$
  En (I): $b - (-13)^2 = 5$
  $b = 174$

$\therefore b_{máx.} = 174$

Clave C

2. $F = \{(x; 2x - 1) / x \in \mathbb{R}\}$

$F(x) = 2x - 1$

Sea: $x = 2 \Rightarrow F(2) = 2(2) - 1 = 3$

Sea: $x = x + h$

$F(x + h) = 2(x + h) - 1$

$F(x + h) = 2x + 2h - 1$

Nos piden: $E = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} + F(2)$

Reemplazando:

$E = \dfrac{2x + 2h - 1 - (2x - 1)}{h} + 3$

$\therefore E = \dfrac{2h}{h} + 3 = 5$

Clave E

3. $F(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$

Analizando se tiene:

$8 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4$

Por teorema:

$-2 \leq x \leq 2 \quad ...(I)$

$Dom(F) = [-2; 2]$

De (I):

Elevamos al cuadrado:

$0 \leq x^2 \leq 4$ por (-2):

$0 \geq -2x^2 \leq -8$

$8 \geq 8 - 2x^2 \geq 0$

$2\sqrt{2} \geq \sqrt{8 - 2x^2} \geq 0$

$2\sqrt{2} \geq F(x) \geq 0$

$Ran(F) = [0; 2\sqrt{2}]$

Luego:

$\therefore Dom(F) \cap Ran(F) = [0; 2]$

Clave B

4. Datos:

$F(a + b) = F(a) + F(b) \wedge F(1) = 2$

(*) Si $a = b = 1$
$F(1 + 1) = F(1) + F(1)$
$F(2) = 2F(1) = 2(2) = 4$

(*) Si $a = b = 2$
$F(2 + 2) = F(2) + F(2)$
$F(4) = 2F(2) = 2(4) = 8$

Nos piden:

$F(n+2) - F(n+4) = F(n) + F(2) - (F(n) + F(4))$

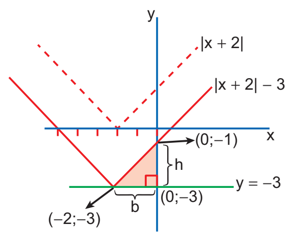
$= F(2) - F(4)$

$= 4 - 8$

$= -4$

Clave D

5.



$\Rightarrow \quad h = |-3| - |-1| = 2$

$b = |-2| - 0 = 2$

$\therefore S_{\triangle} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{2.2}{2} = 2\ u^2$

Clave C

6. $F \circ G(x) = f(g(x))$; evaluamos $f(g(x)) = \underbrace{g(x)} - 1$

$x^2 + 1 - 1$

$f(g(x)) = x^2$

Definición

Dominio de $f \circ g(x)$:

$\{\underbrace{x \in Domg(x)} \wedge \underbrace{g(x) \in Domf(x)}\}$

$-3 \leq x \leq 6 \quad \wedge \quad x^2 + 1 \in [-2; 8]$

$-2 \leq x^2 + 1 \leq 8$

$-3 \leq x^2 \leq 7$

$0 \leq x^2 \leq 7$

$\underbrace{-3 \leq x \leq 6 \cap -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}}$

$x \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$

$\Rightarrow f \circ g(x) = x^2; x \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$

Clave C

7. Completamos cuadrados en la función G(x) (ganancia):

$G(x) = -(x^2 - 400x + \underbrace{36\,000})$

$200^2 - 4000$

$G(x) = -\underbrace{(x^2 - 200 \,.\, 2x + 200^2} - 4000)$

$G(x) = -(x - 200)^2 + 4000$

$\Rightarrow$ G(x) es máximo cuando $(x - 200)^2$ es mínimo.

$\Rightarrow (x - 200)^2 = 0 \ \therefore \ x = 200$

Clave D

8. Primero graficamos $y = x^2 + 6x + 7$ (gráfica de una parábola)

Indentificamos

$a = 1 ; b = 6$

Vértice $(h ; k)$ $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{-b}{2a}; f(h)\right)$

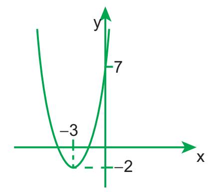
$h = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$h = f(-3) = -2$

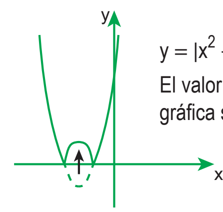
Vértice $(-3; f(-3)) = (-3; -2)$

Intercepto con el eje y:

$\Rightarrow y(0) = 7$



$y = x^2 + 6x + 7$



$y = |x^2 + 6x + 7|$

El valor absoluto hace que la gráfica se refleje en el eje x.

Clave C

9. $f(x) = (x + 2)^2 - 5 \Rightarrow$ probamos si es inyectiva

$(x_1 + 2)^2 - \cancel{5} = (x_2 + 2)^2 - \cancel{5}$

Como $x \in \langle -2; 7\rangle$ (+)

$\Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2$

$x_1 = x_2$ (es inyectiva y posee inversa)

$y = \underbrace{(x + 2)}_{(+)}^2 - 5$

$\sqrt{y + 5} = x + 2$

$x = \sqrt{y + 5} - 2$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 5} - 2$

Clave B

10. $f(g(4)) = f(4 - m) = (4 - m)^2 - 1 \quad ... (1)$

$g(f(m)) = g(m^2 - 1) = m^2 - 1 - m \quad ... (2)$

Dato (1) = (2)

$\Rightarrow (4 - m)^2 - 1 = m^2 - 1 - m$

$16 - 8m + m^2 - 1 = m^2 - 1 - m$

$16 - 8m + \cancel{m^2} - \cancel{1} = \cancel{m^2} - \cancel{1} - m$

$m = 16/7$

Clave D

11. Si F es suryectiva, $]a - b; b + 2a]$ es el rango de F

A partir del dominio hallamos Ranf: $-4 < x \leq 5$

igualando: $-20 < 6x + 4 \leq 34$

$\left.\begin{array}{r} a - b = 20 \\ b + 2a = 34 \end{array}\right\} (+)$

$3a = 14$

$a = 14/3$

$\Rightarrow b = 74/3$

$\therefore \ a/b = \dfrac{14}{3} \div \dfrac{74}{3} = \dfrac{7}{37}$

Clave D

12.

I) $2^x = 8$
$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

II) $\log 2^x = 4$
$x\underbrace{\log 2}_{0,3} = 4$
$x = \dfrac{4}{0,3} \approx 13,3$

III) $(\sqrt{3})^x = 3^4$
$3^{x/2} = 3^4$
$x/2 = 4 \Rightarrow x = 8$

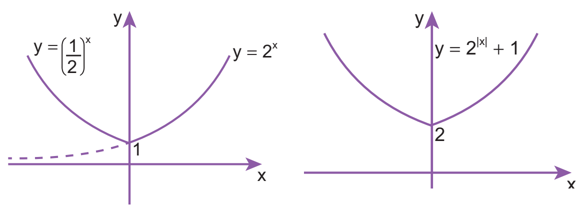
IV) $\log_4 x = 3$
$x = 4^3 = 64$

V) $x = \log_4 64 \Rightarrow x = \log_4 4^3$
$x = 3$
$\therefore$ x es mayor en IV.

Clave D

13. $y = 2^{|x|} + \text{sgn}(|x| + 1)$
Como $|x| \geq 0$
$|x| + 1 \geq 1 \Rightarrow \text{sgn}(|x| + 1) = 1$
$\Rightarrow y = 2^{|x|} + 1$

Partimos de $y = 2^x \Rightarrow y = 2^{|x|}$ función por simétrica al eje y.



Clave C

14. $P(t) = P_o e^{kt}$; k = ?
Reemplazando valores:
$120\%P_o = P_o \cdot e^{k(8)}$
$\dfrac{12}{10} = e^{8k}$
Tomando logaritmo neperiano:
$\ln 1,2 = 8k$
$k = 0,0227$
$\%k = 2,27\%$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 93) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

A) (V)
B) (V) es creciente
C) (F) $DF \neq DG$
D) (F)
E) (F) ya que una recta horizontal la corta en más de 1 punto.
F) (V)

Razonamiento y demostración

3. Dada la función:
$F = \{(2; 5), (-1; -3), (2; 2a - b), (-1; b - a), (a + b^2; a)\}$

Se cumple:
$2a - b = 5$
$b - a = -3$

Resolviendo: $a = 2 \wedge b = -1$

Reemplazando: $F = \{(2; 5), (-1; -3), (3; 2)\}$

Nos piden:
Σ elementos $\text{Dom}(F) = 2 - 1 + 3 = 4$

Clave E

4. Si $x = 0 \Rightarrow F(1) = F(0) + 0 = F(0)$
Si $x = 1 \Rightarrow \underbrace{F(2)}_{5} = F(1) + 1 \Rightarrow F(1) = 4$
Si $x = 2 \Rightarrow F(3) = \underbrace{F(2)}_{5} + 2 \Rightarrow F(3) = 7$
Si $x = 3 \Rightarrow F(4) = F(3) + 3 \Rightarrow F(4) = 10$
$\therefore \dfrac{F(4)}{F(0)} = \dfrac{10}{F(1)} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

Clave C

5. $F = \{(x; F(x)/ F(x) = 6x - x^2\}$
Dato: $0 \leq x \leq 8$
Restamos 3: $-3 \leq x - 3 \leq 5$
Elevamos al cuadrado: $0 \leq x^2 - 6x + 9 \leq 25$
Restamos 9:
$-9 \leq x^2 - 6x \leq 16$
$-16 \leq 6x - x^2 \leq 9$ (por –1)
$-16 \leq F(x) \leq 9$
$\therefore \text{Ran}(F) = [-16; 9]$

Clave A

6.
$0 \leq x \leq 4$
$-1 \leq x - 1 \leq 3$
$0 \leq (x - 1)^2 \leq 9$
$0 \leq \dfrac{(x-1)^2}{3} \leq 3$
$-1 \leq \dfrac{(x-1)^2}{3} - 1 \leq 2 \qquad \therefore \text{Ran } F(x) = [-1; 2]$

Clave A

7. $F(x) = kx \Rightarrow$ del dato $2k + 3k = 10$
$k = 2$
$\Rightarrow F(x) = 2x$
Piden: $F(-5) = -10$

Clave E

8. Hallamos $\text{Dom}G\circ F$: $\underbrace{x \in \text{Dom}(F)}_{(3; -2; 4)} \wedge \underbrace{F(x)}_{} \in \text{Dom}(G)$

$\left.\begin{array}{l} F(-2) = 4 \\ F(3) = -2 \\ F(4) = 16 \end{array}\right\} \in \text{Dom}(G)$

$\Rightarrow \text{Dom}G\circ F = \{-2; 3; 4\}$

$\left.\begin{array}{l} G(F(-2)) = G(4) \\ G(F(3)) = G(-2) \\ G(F(4)) = G(16) \end{array}\right\} G\circ F = \{(-2; G(4)), (3; G(-2))(4; G(16))\}$
$= \{(-2; 11), (3; n), (4; m)\}$

$F - G = \{(-2; 4 - n); (3; -2 - m); (4; 5)\}$

Por comparación $G\circ F = F - G$:
$\Rightarrow m = 5 \quad ; \quad \underbrace{G(4)}_{} = 4 - n$
$11 = 4 - n$
$n = -7$
$\therefore m + n = -2$

Clave E

9.

$1 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$1 \geq x \geq -1$ ...(1)

$0 \leq x^2 \leq 1$

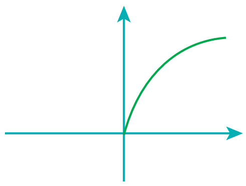
$0 \leq 1 - x^2 \leq 1$

$0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ ...(2)

(2) + (1): $-1 \leq \sqrt{1 - x^2} + x \leq 2$

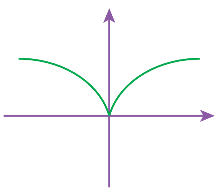
Clave C

10. Sabemos que $f(x) = \sqrt{x}$:



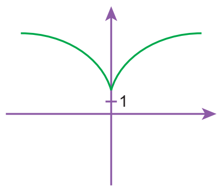
$\Rightarrow f(|x|) = \sqrt{|x|}$

Es una función par, (simétrica al eje y)



$f(x) = \sqrt{|x|} + 1$

Se desplaza verticalmente 1



Clave B

11. Se observa que h(x) es inyectiva

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{x - 1} + 4$

$y - 4 = \sqrt{x - 1}$

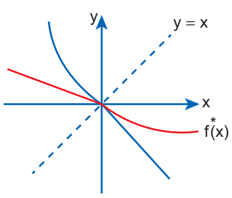
$x - 1 = (y - 4)^2$

$x = (y - 4)^2 + 1$

$h^{-1}(x) = (x - 4)^2 + 1$

Clave C

12.



Clave B

Resolución de problemas

13. Como $(2; 9) \in f(x) \Rightarrow 9 = m(2) + b$ ... (1)

$f(1) = 7 \quad \Rightarrow 7 = m(1) + b$ ... (2)

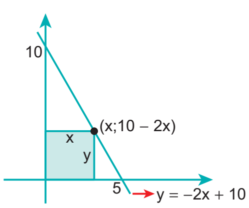
(1) – (2): $2 = m$

En (2):

$b = 5 \therefore b^m = 25$

Clave B

14.



Área del rectángulo (A■):

$xy = (x)(10 - 2x)$

$A_{■} = 10x - 2x^2$

Completando cuadrados:

$A_{■} = -2(x^2 - 5x)$

$A_{■} = -2\left[x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right]$

$A_{■} = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$

Será máximo cuando: $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 5/2$

$\therefore$ Área máxima = 25/2 u^2

Clave B

15. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Para x = 2 $\quad$ f(2) = 0

$\Rightarrow$

	1	–6	12	–8
2		2	–8	8
	1	–4	4	0

$\Rightarrow f(x)\ (x - 2)\underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{(x-2)^2}$

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)^3$

Dato: $g(f(x)) = x - 2$

$g(\underbrace{(x - 2)^3}_{\mu}) = x - 2$

$\mu = (x - 2)^3$

$\sqrt[3]{\mu} + 2 = x$

$\Rightarrow \quad g(\mu) = \sqrt[3]{\mu} + 2 - 2$

$g(\mu) = \sqrt[3]{\mu}$

$\therefore \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

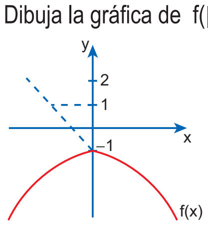
Clave E

Nivel 2 (página 94) Unidad 4

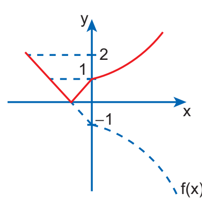
Comunicación matemática

16.

A) Dibuja la gráfica de f(|x|)



B) Dibuja la gráfica de: |f(x)|



17.

Razonamiento y demostración

18. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{|x + 2|} = F(x)$

Factorizando:

$y = \dfrac{(x + 2)(x^2 + 2)}{|x + 2|}; x + 2 \neq 0$

Sea $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ ...(I)

$y = \dfrac{(x + 2)}{(x + 2)}(x^2 + 2) \Rightarrow y = x^2 + 2$

De (I):
$-2 < x < 0 \vee x \geq 0$

Elevamos al cuadrado:
$0 < x^2 < 4 \;\vee\; x^2 \geq 0$
$2 < x^2 + 2 < 6 \;\vee\; x^2 + 2 \geq 2$

$\text{Ran}(F_1) = [2; +\infty\rangle$

• Sea: $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$ ...(II)
$y = -(x^2 + 2)$

De (I):
$x^2 > 4 \Rightarrow x^2 + 2 > 6$
$-(x^2 + 2) < -6$
$\text{Ran}(F_2) = \langle -\infty; -6\rangle$
$\text{Ran}(F) = \text{Ran}(F_1) \Leftrightarrow \text{Ran}(F_2)$



$\therefore \text{Ran}(F) = \langle -\infty; -6\rangle \Longleftrightarrow [2; +\infty\rangle$

Clave B

19. $F(x) = \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{3x - 7 - 8x^2}}$

Dato: $x \in [-a; -b] \Longleftrightarrow [b; a]$ ...(I)

Analizando:

$4x^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \dfrac{x^2 - 1}{3x - 7 - 8x^2} \geq 0$

$x^2 \geq \dfrac{1}{4} \quad \wedge \quad \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{-\underbrace{(8x^2 - 3x + 7)}_{> 0}} \geq 0$

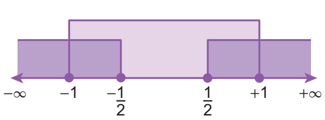
$x^2 \geq \dfrac{1}{4} \quad \wedge \quad (x + 1)(x - 1) \leq 0$

$x^2 \geq \dfrac{1}{4} \quad \wedge \quad x^2 \leq 1$

Por teorema:

$CS = \left\{x \geq \dfrac{1}{2} \vee x \leq -\dfrac{1}{2}\right\} \cap \{-1 \leq x \leq 1\}$

Graficando:



$CS = \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ ...(II)

De (I) ∧ (II): $a = 1, b = \dfrac{1}{2}$

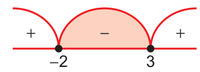
Nos piden: $a + b$

$\therefore a + b = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Clave C

20. Hallamos Dom(F):

$\Rightarrow \quad 6 + x - x^2 \geq 0$ por (-1)
$x^2 - x - 6 \leq 0$
x −3
x 2
$(x - 3)(x + 2) \leq 0$



$x \in [-2; 3]$

Hallamos el rango de F:

$y = 1 - \sqrt{-(x^2 - x - 6)}$

$y = 1 - \sqrt{-(x - 1/2)^2 + \dfrac{25}{4}}$

Formamos **y** a partir del dominio:

$-2 \leq x \leq 3$

$-\dfrac{5}{2} \leq x - 1/2 \leq \dfrac{5}{2}$

$0 \leq (x - 1/2)^2 \leq \dfrac{25}{4}$

$-\dfrac{25}{4} \leq -(x - 1/2)^2 \leq 0$

$0 \leq \dfrac{25}{4} - (x - 1/2)^2 \leq \dfrac{25}{4}$

$0 \leq \sqrt{\dfrac{25}{4} - (x - 1/2)^2} \leq \dfrac{5}{2}$

$-\dfrac{5}{2} \leq -\sqrt{\dfrac{25}{4} - (x - 1/2)^2} \leq 0$

$-\dfrac{3}{2} \leq 1 - \sqrt{\dfrac{25}{4} - (x - 1/2)^2} \leq 1$

$\text{Ran}(F) = [-3/2; 1]$
$\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F) = [-3/2; 1]$

Clave C

21. Puntos de intersección:

$F(x) = G(x)$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \dfrac{x}{2} + 2$

$x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 = 0$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$
2x −1
x −2

$(2x - 1)(x - 2) = 0$
$\Rightarrow x = 1/2 \vee x = 2 \Rightarrow$ puntos de intersección: $(1/2; 9/4)$ y $(2; 3)$

Clave B

22. Hallamos $G^* = \{(1; 7); (3; -2); (6; 2); (7; 4)\}$

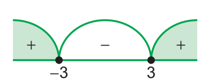
Piden $F(G^*(6)) \Rightarrow G^*(6) = 2$

$\therefore F(2) = \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$

Clave C

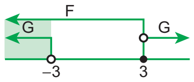
23. Dominio de una diferencia de funciones es la intersección de los dominios de cada función.

$\Rightarrow \quad D(F - G) = DF \cap DG$
$\text{Dom}(F) = 3 - x \geq 0$
$x \leq 3$
$\text{Dom}(G) = x^2 - 9 > 0$
$(x + 3)(x - 3) > 0$



$\Rightarrow x < -3 \cup x > 3$

Interesecamos dominios:



$\Rightarrow$ Dom(F) $\cap$ Dom(G) = $x \in \langle -\infty; -3\rangle$

Clave E

24. Veamos si admite inversa $\Rightarrow$ f(x) debe ser inyectiva:

$$-\underbrace{\sqrt{x_1^2+3x_1-10}}_{+} = -\underbrace{\sqrt{x_2^2+3x_2-10}}_{+} \quad \text{restringiendo}$$

Completando cuadrados:

$$\left(x_1+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10=\left(x_2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10$$

$$\underbrace{\left(x_1+\frac{3}{2}\right)^2}_{-}=\underbrace{\left(x_2+\frac{3}{2}\right)^2}_{-}$$

Como $x \le -5$:

$$-x_1-\frac{3}{2}=-x_2-\frac{3}{2}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \text{ existe } f^{-1}$$

De f(x) $y=-\sqrt{x^2+3x-10}$

$$-y=\sqrt{(x+3/2)^2-\frac{49}{4}}$$

$$y^2=(x+3/2)^2-\frac{49}{4}$$

$$y^2+49/4=\underbrace{(x+3/2)^2}_{-}$$

Sacamos $\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{y^2+\frac{49}{4}}=-x-3/2$$

$$\sqrt{y^2+\frac{49}{4}}+\frac{3}{2}=-x$$

$$x=-\frac{3}{2}-\sqrt{y^2+\frac{49}{4}}$$

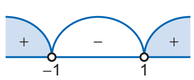
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{3}{2}-\sqrt{x^2+\frac{49}{4}}$$

Clave C

25. Por definición de funciones logarítmicas:

$\log_b x \Rightarrow b > 0 \wedge b \neq 1;\ x > 0$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{x-1} > 0$$



Puntos críticos: $\{-1; 1\}$

$x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

Equivalente a $x \in \mathbb{R} - [-1; 1]$

Clave D

26. Como la base está entre $\langle 0; 1\rangle$:

$\Rightarrow 2x-3 \le 6-x$

$3x \le 9$

$x \le 3 \wedge 6-x > 0 \wedge 2x-3>0$

$x \le 3 \wedge 6 > x \wedge x > 3/2$

Intersectando los dominios parciales:

$\Rightarrow x \in \langle 3/2; 3]$

Clave B.

27. $4^{x^2/2} \le 4^{x/2+6} \Rightarrow \frac{x^2}{2} \le \frac{x}{2}+6$

Resolviendo: $(x-4)(x+3) \le 0$

Por puntos críticos: $x \in [-3; 4]$

Clave D

Resolución de problemas

28. Sabemos que el n.° de habitantes crece según $P(t) = P_0e^{kt}$

Donde:

t : n.° de años

P_0 : población inicial

k : tasa relativa de crecimiento

$\Rightarrow t = 2015 - 1990 = 25$ años

$P(25) = 6000\ (e)^{3\% \times 25}$

$P(25) = 12\ 702$

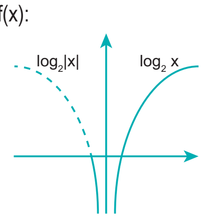
Clave C

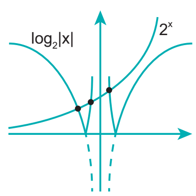
29. $|\log_2|x|| - 2^x = 0$

$$\underbrace{|\log_2|x||}_{f(x)} = \underbrace{2^x}_{g(x)}$$

$\Rightarrow$ El n.° raíces será donde se intersectan las gráficas f(x) y g(x).

Dibujamos f(x):





3 puntos de corte

Observación:
Existen 2 raíces negativas y 1 positiva.

$\therefore$ La ecuación posee 3 raíces reales

Clave C

Nivel 3 (página 95) UNIDAD 4

Comunicación matemática

30.

A) $\langle -\infty; +\infty\rangle$ o $\mathbb{R}$

B) $0 < b < 1$

C) $f(0) = 2$ $\qquad f(-3) = 5$

D) $y = b^x + 1$

$y - 1 = b^x$

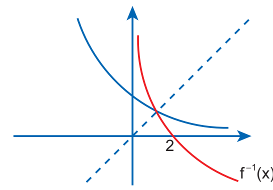
Tomamos logaritmos en base **b**:

$\log_b(y-1) = x\log_b b$

$\log_b(y-1) = x$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_b(x-1)$

Su gráfica:



31.

I. Si su base es mayor que 1.

II. $b \in \langle 0; 1\rangle$

III. Tiene base negativa.

IV. La función exponencial.

V. Suryectiva e inyectiva.

VI. $F(32) = \log_2 32$

$F(32) = \log_2 2^5$

$F(32) = 5$

32.

I. (V)

II. (V)

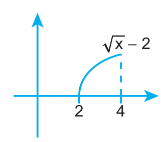
$$\sqrt{x_1^2+16}-1=\sqrt{x_2^2+16}-1$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

Como $x \ge 4$:

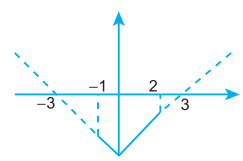
$\Rightarrow x_1 = x_2$

III. (V) Gráficamente es creciente de $[2, 4\rangle$:



IV. (F) graficamos $x \in [-1; 2\rangle$

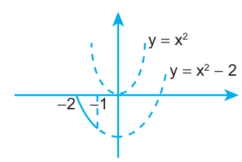
$f(x) = |x| - 3$



$\Rightarrow$ De –1 a 2 la gráfica decrece y crece.

V. (V) graficamos para $x \le -1$

$f(x) = x^2 - 2$



Observamos que f(x) es inyectiva.

$\therefore$ Posee inversa.

Clave C

Razonamiento y demostración

33. Datos:

$G(F(x)) = x + 2$ ...(I)

$F(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$F(x) = (x+2)^3$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):
$G((x+2)^3) = x + 2$

Sea $y = (x+2)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} - 2$

$\Rightarrow G(y) = \sqrt[3]{y} - 2 + 2 = \sqrt[3]{y}$

$G(y) = \sqrt[3]{y}$

Cambiando y por x, se tiene:
$G(x) = \sqrt[3]{x}$

Clave E

34. $F(x) = \sqrt[4]{\dfrac{5x}{x^2-9}}$

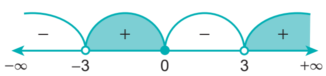
Analizando:

$\dfrac{5x}{x^2-9} \geq 0$

$x(x^2-9) \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 9 \neq 0$

$x(x+3)(x-3) \geq 0 \ \wedge \ x \neq \pm\ 3$

Puntos críticos: 0; –3 y 3



$x \in \langle -3; 0] \cup \langle 3; +\infty \rangle$

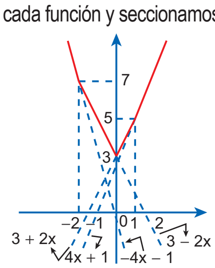
$Dom(F) = \langle -3; 0] \cup \langle 3; +\infty \rangle$

Clave D

35. Tenemos que eliminar los valores absolutos
$\Rightarrow$ Puntos criticos x = –2; x = 1; x = 0
Restringimos:

$$\Rightarrow F(x): \begin{cases} -4x - 1; \forall x < -2 \\ 3 - 2x; \forall x \in -2 \leq x \leq 0 \\ 3 + 2x; \forall x \in 0 \leq x < 1 \\ 4x + 1; \forall\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Graficamos cada función y seccionamos por tramos:



Clave D

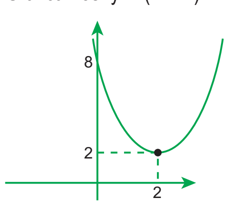
36. $y = |x|^2 - 4|x| + 6$

Completando cuadrados:

$y = (|x| - 2)^2 + 2$

$\Rightarrow$ y es una función par (simétrica al eje y)

Graficamos: $y = (x-2)^2 + 2$

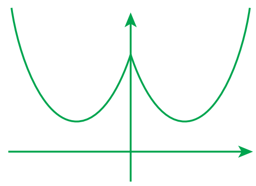


Parábola de vértice (2; 2)
$x = 0 \Rightarrow y = 8$
(punto de corte con la ordenada)

Pero la gráfica posee valor absoluto:
$y = (|x| - 2)^2 + 2$

$\Rightarrow$ No considera a $x < 0$; solo $x \geq 0$ y se refleja en el eje **y**:

$\Rightarrow y = (|x| - 2)^2 + 2$



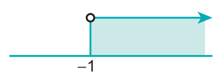
Clave C

37. Como es función suryectiva, M es el rango de F y $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Para eliminar el valor absoluto restringimos:

- $\forall\ x < 1$:
  $F(x) = 1 - x - x$
  $F(x) = 1 - 2x \Rightarrow$ formamos F(x) a partir del D(F)

$$x < 1$$
$$-2x > -2$$
$$1 - 2x > -1$$



$F(x) \in \langle -1; +\infty \rangle$ ... (I)

- $\forall x \geq 1$
  $F(x) = x - 1 - x = -1$ ...(II)
  Ran(F): (I) ∪ (II) = $[-1; +\infty\rangle$
  $\therefore\ M = [-1; +\infty\rangle$

Clave D

38. Sabemos que x > 0 (función)
Tomamos logaritmos en base **e**:

$\ln (x^{\ln x}) = \ln(e^2 x)$

Propiedad de logaritmos:

$\ln x \,.\, \ln x = \ln e^2 + \ln x$

$\ln^2 x = 2 + \ln x$

$\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$

Completando cuadrados:

$(\ln x - 1/2)^2 - 1/4 - 2 = 0$

$|\ln x - 1/2| = 3/2$

$\Rightarrow \ln x - 1/2 = 3/2 \ \vee\ \ln x - 1/2 = -3/2$

$\ln x = 2 \quad \vee \quad \ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^2 \quad \vee \quad x = e^{-1}$

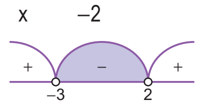
Clave B

39. Por funciónes logarítmicas sabemos que:

$x - 1 > 0 \ \wedge\ x - 1 \neq 1 \ \wedge\ 6 - x^2 - x > 0$

$\underbrace{x > 1 \ \wedge\ x \neq\ 2}_{(I)} \ \wedge\ x^2 + x - 6 < 0$

x 3
x –2



$\underbrace{x \in \langle -3; 2\rangle}_{(II)}$

$\Rightarrow$ (I) ∩ (II): $x \in \langle 1; 2\rangle$

Clave D

40. En una función logarítmica $\log_b x$: b > 0 b ≠ 1; x > 0

$\Rightarrow x - 3 > 0 \ \wedge\ x - 3 \neq 1 \wedge\ \ 7 - x > 0$

$\underbrace{x > 3 \wedge x \neq 4}_{(I)} \qquad \wedge\ \underbrace{x < 7}_{(II)}$

(I) ∩ (II):

$x \in \langle 3; 7\rangle - \{4\}$

↓ ↓ ↓
a b c

$\therefore\ a + b + c = 3 + 7 + 4 = 14$

Clave C

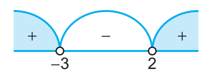
41. $\Rightarrow \ln\left(\dfrac{3x-2}{x+3}\right) > 0$

$\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) > \ln 1$ (n > 1) base mayor a uno.

$\Rightarrow \dfrac{3x-1}{x+3} > 1$

$\dfrac{3x-1}{x+3} - 1 > 0$

$\dfrac{2x-4}{x+3} > 0$



$x \in \mathbb{R} - [-3, 2]$

Clave C

Resolución de problemas

42. $C(t) = C_0 e^{-kt}$

$\dfrac{C_0}{3} = C_0 e^{-kt}$

$\dfrac{1}{3} = e^{-kt}$

Tomando logaritmo en base **e**:

$\ln 1/3 = \ln e^{-kt}$

$\ln 1/3 = -kt$

$\dfrac{-\ln 1/3}{k} = t \Rightarrow t = \dfrac{\ln 3}{k} = t$

Clave A.

43. Observamos que cada 30': se duplica
60': se cuadruplica
90': es 8 veces b inicial

$\Rightarrow$ Crece exponencialmente.

$C(t) = C_0(2)^{t/30}$

$\Rightarrow\ C(t) = 20\,000(2)^{t/30}$

$C(t) = 2^{t/30 + 1} \times 10^4$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 97) Unidad 4

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 17x + 4}{5x^2 - 3x + 10}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3(2)^2 + 17(2) + 4}{5(2)^2 - 3(2) + 10} = \dfrac{25}{12}$

Clave A

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 4}{x - 2} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Luego:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(3 + \dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{3}{1} = 3$

Clave B

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim \dfrac{(x-3)(x^2 + 3x + 3^2)}{(x+3)(x-3)}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 + 3x + 9)}{x + 3} = \dfrac{3^2 + 3.3 + 9}{6} = \dfrac{9}{2}$

Clave E

4. $S = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 2x + 1}{2x^3 + x + 1}$

Como el grado del dividendo es igual al grado del divisor:

$S = \dfrac{5}{2}$

Clave C

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2 - x - 6)}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x - 3}{x - 2} = \dfrac{-5}{-4} = \dfrac{5}{4}$

Clave D

6. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x}^4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x}}\right)^{3\left(\frac{\sqrt{x}^6 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x}}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left\{\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3 - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}\right\}^{\left\{\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}^5 - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}\right\}}$

$= \left\{\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x}^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}\right)\right\}^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3(\sqrt{x}^5 - 1)}{\sqrt{x} - 1}}$

$= (1)^{3(1)} = 1$

Clave E

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{\text{sen}6x} = \dfrac{0}{0}$

Para levantar la indeterminación emplearemos las identidades trigonométricas.

Sabemos:

$1 - \cos 6x = 2\text{sen}^2 3x$

Reemplazando:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\text{sen}^2 3x}{\text{sen}6x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\dfrac{2\text{sen}^2 3x}{6x}}{\dfrac{\text{sen}6x}{6x}}\right)$

$\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}6x}{6x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen}3x}{3x}\right)\text{sen}3x$

$\Rightarrow \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{3x}\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}3x\right) = 0$

Clave B

8. Sea:

$P = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{(x - b)(x^2 + bx + b^2)}{(\sqrt{x} - \sqrt{b})}$

$P = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{b})(\sqrt{x} + \sqrt{b})(x^2 + bx + b^2)}{(\sqrt{x} - \sqrt{b})}$

$\Rightarrow P = \lim\limits_{x \to b} (\sqrt{x} + \sqrt{b})(x^2 + bx + b^2)$

$\Rightarrow P = (\sqrt{b} + \sqrt{b})(b^2 + b^2 + b^2)$

$\therefore P = 2\sqrt{b}(3b^2) = 6\sqrt{b^5}$

Clave E

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 3}\right)^{x + 2}$

Recordar:

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} (f(x) - 1)g(x)}$

En el problema:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 3}\right)^{x + 2} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} - 1\right)(x+2)}$

$= e^{\lim\limits_{x \to \infty} (-4)\frac{(x+2)}{(x+3)}}$

$= e^{-4 \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)}$

$= e^{-4}$

Clave D

10. $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{1 + 12x} - 7}\right) = \dfrac{0}{0}$

Para levantar la indeterminación, multiplicamos por la conjugada al numerador y denominador:

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{1 + 2x} - 3)(\sqrt{1 + 2x} + 3)(\sqrt{1 + 12x} + 7)}{(\sqrt{1 + 12x} - 7)(\sqrt{1 + 12x} + 7)(\sqrt{1 + 2x} + 3)}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(1 + 2x - 9)(\sqrt{1 + 12x} + 7)}{(1 + 12x - 49)(\sqrt{1 + 2x} + 3)}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2(x - 4)(\sqrt{1 + 12x} + 7)}{12(x - 4)(\sqrt{1 + 2x} + 3)}$

$= \dfrac{2}{12} \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{1 + 12x} + 7)}{(\sqrt{1 + 2x} + 3)}$

$= \dfrac{2}{12} \cdot \dfrac{(7 + 7)}{(3 + 3)} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{14}{6}$

$= \dfrac{7}{18}$

Clave E

11. Sea: $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+6} - \sqrt{4x^2+x+3}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{4x^2+3x+6} - \sqrt{4x^2+x+3})(\sqrt{4x^2+3x+6} + \sqrt{4x^2+x+3})}{(\sqrt{4x^2+3x+6} + \sqrt{4x^2+x+3})}$$

Por diferencia de cuadrados tenemos:

$$f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+3x+6} + \sqrt{4x^2+x+3}}$$

Dividiendo entre x al numerador y denominador:

$$f(x) = \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}} + \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ k = \frac{1}{2}$

Clave A

12. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

Nota:

$$(\sqrt[n]{F(x)}-b)\underbrace{[\sqrt[n]{F(x)}^{n-1} + \sqrt[n]{F(x)}^{n-2} + ... + b]}_{\text{Factor racionalizante}} = \sqrt[n]{F(x)}^{n} - b^n$$

En el problema:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{(\sqrt[7]{x}-1)(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+...+\sqrt[7]{x}+1)}^{x-1}(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+...+1)}{\underbrace{(\sqrt[5]{x}-1)(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}_{x-1}(\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+...+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+...+1}{\sqrt[7]{x^6}+\sqrt[7]{x^5}+...+1} = \frac{\overbrace{1+1+...+1}^{5\text{ veces}}}{\underbrace{1+1+...+1}_{7\text{ veces}}} = \frac{5}{7}$$

Clave B

13. Sea $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\right)}$$

Factorizando:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]}{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right]}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Clave C

14. Evaluando 1^{∞}

Recordar: $L = e^{\lim\limits_{x\to\infty}[(f(x)-1)g(x)]}$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-b}{x+b}-1\right)x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2bx}{x+b}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2bx}{1+\frac{b}{x}}\right)}$$

$$= e^{-2b}$$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 99) Unidad 4

Comunicación matemática

1. I. C $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 2$

II. I $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

III. C $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

IV. I ya que $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

V. C cuando x es muy grande la función tiende a cero.

2.

Razonamiento y demostración

3. Por la forma práctica se evalúa:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}+x}{8-x} = \frac{\sqrt[3]{8}+9}{8-9} = \frac{11}{-1} = -11$$

Clave D

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2}{4}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Clave E

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{4}$$

Clave A

6. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)}{(x-3)}\times\dfrac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+6}+3)}=\dfrac{2+2}{3+3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Clave C

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}}_{e}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}_{1}$

Clave E

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}7x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}7\left(\dfrac{\text{sen}7x}{7x}\right)$

Como $x\to 0$, entonces $7x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}7x}{x}=7\left(\underbrace{\lim\limits_{7x\to 0}\dfrac{\text{sen}7x}{7x}}_{1}\right)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}7x}{x}=7$

Clave C

9. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$

Clave D

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+12x}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\dfrac{3}{7}$

Clave E

11. Por el teorema de límites laterales:

- Límite por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-}6x-x^2=5$
- límite por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+}3+5x=8$

Los límites laterales son diferentes.

$\therefore\ \nexists\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Clave D

Resolución de problemas

12. Sea:

$f(x)=\dfrac{(x+3)^n\,.\,(4x+7)^{n-2}\,.\,(3x-4)^{n+1}}{(9x^2+x+3)^n\,.\,(2x-5)^{n-1}}$

Factorizando:

$f(x)=\dfrac{x^n\,.\,x^{n-2}\,.\,x^{n+1}\,.\left(1+\frac{3}{x}\right)^n\left(4+\frac{7}{x}\right)^{n-2}\left(3-\frac{4}{x}\right)^{n+1}}{x^{2n}\,.\,x^{n-1}\left(9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^n\left(2-\frac{5}{x}\right)^{n-1}}$

$f(x)=\dfrac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^n.\left(4+\frac{7}{x}\right)^{n-2}.\left(3-\frac{4}{x}\right)^{n+1}}{\left(9+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^n.\left(2-\frac{5}{x}\right)^{n-1}}$

Luego:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\dfrac{4^{n-2}\,.\,3^{n+1}}{9^n\,.\,2^{n-1}}=\dfrac{8}{243}$

$\Rightarrow\dfrac{2^{n-3}}{3^{n-1}}=\dfrac{2^3}{3^5}$

$\therefore\ n=6$

Clave C

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^3+3^3+4^3+...+n^3}{1+2n^2+3n^3+4n^4}\right)$

Por fórmula:

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{1+2n^2+3n^3+4n^4}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4(1+2n^2+3n^3+4n^4)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n^3+n^2}{16n^4+12n^3+8n^2+4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{16+\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^4}}=\dfrac{1}{16}$

Clave D

Nivel 2 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

14.

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3}{\sqrt{7-x}}$	$=\dfrac{3}{\sqrt{7-4}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$	$=\sqrt{3}$
$\lim\limits_{x\to 3^-}[\![x+2]\!]$	$x<3$ $x+2<5$ $\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 3^-}[\![x+2]\!]=4$	$=4$
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lvert x\rvert}{x^2}$	$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert x\rvert^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$	$=1$
$\lim\limits_{x\to m}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{m}}{x-m}$	$=\lim\limits_{x\to m}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{m})(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{(x-m)(\sqrt{x}+\sqrt{m})}$	$=\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{senpx}}{x}$	$=\lim\limits_{x\to 0}p\dfrac{\text{senpx}}{px}=p$	$=p$

15.

2. $x=z^6$ (M.C.M (2;3)) $\Rightarrow\begin{array}{l}\sqrt{x}=z^3\\ \sqrt[3]{x}=z^2\end{array}$

$x\to 64\Rightarrow z\to 2$

3. $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^3-8}{z^2-4}=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^3-2^3}{z^2-2^2}=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{(z-2)(z^2+2z+4)}{(z-2)(z+2)}$

$=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2+2z+4}{z+2}=\dfrac{2^2+4+4}{4}=3$

Razonamiento y demostración

16. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\overbrace{(\sqrt[3]{x}-2)\,.\,(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)}^{x-8}(\sqrt{x}+2\sqrt{2})}{\underbrace{(\sqrt{x}-2\sqrt{2})\,.\,(\sqrt{x}+2\sqrt{2})}_{x-8}(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\dfrac{4\sqrt{2}}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Clave C

17. $f(x) = 3x + 2$ ...(I)

La expresión:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-2)-f(-2)}{h}=\frac{0}{0}$$

En (I):

$f(h-2) = 3(h-2) + 2 = 3h - 4$

$f(-2) = 3(-2) + 2 = -4$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(3h-4)-(-4)}{h}=3$$

Clave E

18. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+3}{3x^3-x+4}$$

Como el grado del dividendo es igual al grado del divisor:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+3}{3x^3-x+4}=\frac{1}{3}$$

Clave B

19. Sea:

$$N=\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2+2ax}{x^3-a^3}-\frac{1}{x-a}\right); a\neq 0$$

$$N=\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2+2ax}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}-\frac{1}{x-a}\right)$$

$$N=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}\left[\frac{x^2+2ax}{x^2+ax+a^2}-1\right]\right)$$

$$N=\lim_{x\to a}\frac{a}{x^2+ax+a^2}=\frac{a}{a^2+a.a+a^2}$$

$$\therefore N=\frac{1}{3a}$$

Clave C

20. Datos:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{F(x)}{1-x^3}\right]=2 \qquad ...(I)$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{G(x)}{1-x^2}\right]=-3 \qquad ...(II)$$

Dividiendo (I) y (II):

$$\frac{\lim_{x\to 1}\left(\frac{F(x)}{1-x^3}\right)}{\lim_{x\to 1}\left(\frac{G(x)}{1-x^2}\right)}=\frac{2}{-3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^2)F(x)}{(1-x^3)G(x)}=-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x^3}\cdot\lim_{x\to 1}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right]=\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}\lim_{x\to 1}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right]=-\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\lim_{x\to 1}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right]=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right]=-1$$

Clave B

21. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}4x}{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\,.\,\text{sen}4x}{5x}$$

$$=\frac{6\,.\,4}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}4x}{4x}$$

$$=\frac{24}{5}$$

$= 4{,}8$

Clave E

22. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2+2}{x-2}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x$$

Propiedad:

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}-1\right)x}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{2}{x}}}=e^4$$

Clave B

23. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Hacemos $x = y^{15}$

$x\to 1 \Rightarrow y^{15}\to 1 \Rightarrow y\to 1$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

Clave E

Resolución de problemas

24. Por definición de límites laterales.

El límite existe si existen los límites laterales y son iguales.

- $\lim_{x\to 3^+} x^2-\frac{22}{3}=9-\frac{22}{3}=\frac{5}{3}$
- $\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+16}-5}$ $\left(\text{forma }\frac{0}{0}\right)$ multiplicamos por la conjugada del denominador:

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)}{(\sqrt{x^2+16}-5)(\sqrt{x^2+16}+5)}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x^2+16}+5)}{\underbrace{x^2+16-25}_{\cancel{(x-3)}(x+3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2+16}+5}{x+3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

Como:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}f(x)=\frac{5}{3}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3}f(x)$$

25. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax+bsenbx}{bx+asenax}\right)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^2x\left(\frac{ax}{b^2x}+\frac{bsenbx}{b^2x}\right)}{a^2x\left(\frac{bx}{a^2x}+\frac{asenax}{a^2x}\right)}=1$$

$$\frac{b^2}{a^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{a}{b^2}+\frac{sen(bx)}{bx}}{\frac{b}{a^2}+\frac{sen(ax)}{ax}}\right)=1$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b^2}+1\right)}{\left(\frac{b}{a^2}+1\right)}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^2}+1=\frac{1}{b}+\frac{a^2}{b^2}$$

$a+b^2=b+a^2$

$(a-b)+b^2-a^2=0$

$(a-b)-(a-b)(a+b)=0$

$\underbrace{(a-b)}_{\neq 0}[1-b-a]=0$

$1-b-a=0$

$\therefore a+b=1$

Clave B

Nivel 3 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

26.

A) Usamos límites laterales

- $\lim_{x\to 1^+}\frac{[\![3x]\!]+3}{x}=\frac{6}{1}=6$

  $x>1$
  $3x>3$
  Como x tiende a 1:
  $3<3x<4$
  $\Rightarrow [\![3x]\!]=3$

- $\lim_{x\to 1^-}\frac{[\![3x]\!]+3}{x}=\frac{2+3}{1}=5$

  $x<1$
  $2\leq 3x<3$
  $[\![3x]\!]=2$

Como los límites laterales son diferentes, el límte ∄. (V)

B) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/senx}$, evaluamos $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/senx}=1^{\infty}$

Por propiedad.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/senx}=L=e^{\lim_{x\to 0}\left[(\cos x-1)senx\right]}$$

$$=e^{(1-1).0}=e^0=1$$

(V)

C) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; aplicamos L' Hospital teniendo en cuenta:

$f(x)=e^x-1\Rightarrow f'(x)=e^x$
$g(x)=x\Rightarrow g'(x)=1$

Por L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$ (F)

D)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+x}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

(F)

27.

I. $a\lim_{x\to 0}(x)+\lim_{x\to 0}\left(b.\frac{senbx}{bx}\right)=2$

$a(0)+b(1)=2$

$b=2$

II. $b=\lim_{n\to\infty}\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$b=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$

$b=\frac{2+0+0}{6}=\frac{1}{3}$

Razonamiento y demostración

28. Al elevar se obtiene $\infty-\infty$, en este caso se efectúa la operación para levantar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{3x-6}-\frac{2}{2x^2-5x+2}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-10x+4-6x+12}{(2x^2-5x+2)(3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)^2}{3(2x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{3(2x-1)}=\frac{4}{9}$$

Clave C

29. Sea $N=\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}-\sqrt[3]{3}}{x-25}$

$$N=\lim_{x\to 25}\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}+\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{(x-25)\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}+\sqrt[3]{\sqrt{x}-2}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}$$

$$N=\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)3}+\sqrt[3]{9}\right)}$$

$$N=\lim_{x\to 25}\frac{1}{(\sqrt{x}+5)\left(\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{x}-2)3}+\sqrt[3]{9}\right)}$$

$$N=\frac{1}{10(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9})}=\frac{1}{10\,.\,3\sqrt[3]{9}}$$

$$\Rightarrow N=\frac{\sqrt[3]{3}}{30.\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{30.3}$$

$$\therefore N=\frac{\sqrt[3]{3}}{90}$$

Clave C

30. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-9x+6-x^2+x+2}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8x+8}{(x^2-x-2)(x^2-3x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)^2}{(x-2)(x+1)(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{(3)(1)}=\frac{2}{3}$$

Clave B

31. Recordar:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

En el ejercicio:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3-x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+1}{x^3-x^2+1}-1\right)\left(\frac{2x^2+1}{3x+1}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+4x^3+x^2+2x}{3x^4-2x^3+3x+1}}$$

Clave D

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$

Por L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}3^x\ln 3=\ln 3$$

Clave B

33. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}{\cos x}\quad\left(x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x\geq 0\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\operatorname{sen}x}=\sqrt{2}$$

Clave C

Resolución de problemas

34. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}^3x}{x(\operatorname{sen}^2x+\cos x-1)}\right]=\dfrac{0}{0}$

Para levantar la indeterminación, hacemos uso de las identidades trigonométricas:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\,.\operatorname{sen}^2x}{-x(1-\operatorname{sen}^2x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(1-\cos^2x)}{-x(\cos^2x-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos^2x-1)}{x.\cos x(\cos x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos x-1)(\cos x+1)}{x.\cos x(\cos x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos x+1)}{x.\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{\cos x}=(1).(2)=2$$

Clave D

35. Propiedad de límites

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-3$ ...(1)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-1$ ...(2)

(1) – (2): $2\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-2$

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=-1\ \wedge\ \lim_{x\to x_0}f(x)=-2$$

$$\therefore\ \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x).g(x)}{2}\right]=\frac{(-2)(-1)}{2}=1$$

Clave A

36. Sea: $f(x)=\dfrac{a^x-4^x}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{0}{0}$

Escribimos: $f(x)=\dfrac{(a^x-1)-(4^x-1)}{x}$

Luego: Sea $\alpha=a^x-1\Rightarrow\alpha+1=a^x$

Aplicando logaritmos:

$x\ln a=\ln(\alpha+1)$

$$x=\frac{\ln(\alpha+1)}{\ln a}$$

Si $x\to 0\Rightarrow\alpha\ \to 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}}=\ln a\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}$$

$$=\ln a.\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$=\ln a.\frac{1}{\ln e}=\ln a$$

Análogamente: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{x}=\ln 4$

Nos piden:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}$$

$$=\ln a-\ln 4$$

$$=\ln\left(\frac{a}{4}\right)$$

Clave D

37. Sea:

$$f(x)=\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

Multiplicando al numerador y denominador por:

$$(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+1)$$

y reduciendo se obtiene:

$$f(x)=\frac{(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+...+1)}{(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+...+1)}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{\overbrace{1+1+...+1}^{n\ \text{veces}}}{\underbrace{1+1+...+1}_{m\ \text{veces}}}=\frac{n}{m}$$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 102) Unidad 4

1. $f(x) = 5x^2 - 7x + 8$

$\Rightarrow f'(x) = 10x - 7$

$\therefore f'(3) = 10(3) - 7 = 23$

Clave A

2. Se pide calcular:

$$A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[5]{1+x}} \right)$$

Como tiene la forma $\frac{0}{0}$, aplicamos L' Hospital:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{20}}$$

$\therefore A = \frac{10}{3}$

Clave C

3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$

Luego: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = 6$

Clave D

4. $f(x) = x(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = 1(x+1)^{\frac{1}{2}} + x \,.\, \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow f'(8) = \sqrt{9} + \frac{8}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{4}{3}$

$\therefore f'(8) = \frac{13}{3}$

Clave A

5. Empleamos $D_x f(x)^n = nf(x)^{n-1}$

$\Rightarrow \quad D_x(x^3 + 6x^2 + 3x)^4 = 4(x^3 + 6x^2 + 3x)^3 (3x^2 + 12x + 3)$

$\Rightarrow \quad f'(1) = 4(10)^3(18) = 2^2 \,.\, 2^3 \,.\, 5^3 \,.\, 2 \,.\, 3^2$

$= 2^6 \,.\, 3^2 \,.\, 5^3$

Clave C

6. Por la definición

La ecuación L_T: $y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{10}(x - x_0)$ ... (I)

$f'(x) = \frac{3x^2}{6} + 4x$

$f'(2) = 2 + 8 = 10$

En (I):

L_T: $y - \frac{10}{3} = 10(x - 2)$

$y - 10x + \frac{50}{3} = 0$

Clave E

7. $f(x) = \frac{9}{5}\cos(5x)$

$f'(x) = \frac{9}{5}(5) \,.\, [-\text{sen}(5x)]$

$\therefore f'(x) = -9\text{sen}(5x)$

Clave A

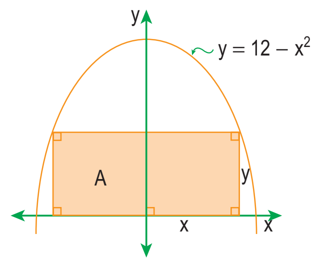
8. $f(x) = \ln(x + 7)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x+7)'}{x+7}$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x+7}$

Clave A

9.



Área: $A = 2x \,.\, y = 2x(12 - x^2)$

$A(x) = 24x - 2x^3$ ...(1)

$A'(x) = 24 - 6x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$\Rightarrow x = 2$ ...(2)

$A(2) = 24(2) - 2(2)^3 = 48 - 16$

$A(2) = 32$

Para asegurar que $A(2) = 32$ es el máximo:

$A''(x) = -12x$

$A''(2) = -24 < 0$

$\therefore$ Área máxima = 32

Clave A

10. $\lim\limits_{x \to a} \frac{(x^3 - a^3)}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}$; tiene la forma $\frac{0}{0}$.

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} (3a^2)(2\sqrt{a}) = 6a^2\sqrt{a}$

Clave B

11. $A = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} \right)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, levantando la indeterminación:

$A = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1} + 3)}{(\sqrt{4x+1} - 3)(\sqrt{4x+1} + 3)(x + \sqrt{x+2})}$

Resolviendo:

$A = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2 - x - 2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{(4x - 8)(x + \sqrt{x+2})}$

$A = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})}$

$A = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x + \sqrt{x+2})}$

$\therefore A = \frac{3(\sqrt{9} + 3)}{4(2 + \sqrt{4})} = \frac{9}{8}$

Clave A

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \dfrac{0}{0}$

Luego:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[8]{x}-1)(\sqrt[8]{x}^7+\sqrt[8]{x}^6+...+1)(\sqrt[5]{x}^4+\sqrt[5]{x}^3+...+1)}{(\sqrt[5]{x}-1)(\sqrt[5]{x}^4+\sqrt[5]{x}^3+...+1)(\sqrt[8]{x}^7+\sqrt[8]{x}^6+...+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[5]{x}^4+\sqrt[5]{x}^3+...+1)}{(x-1)(\sqrt[8]{x}^7+\sqrt[8]{x}^6+...+1)}$$

$$= \frac{\overbrace{1+1+...+1}^{5 \text{ veces}}}{\underbrace{1+1+...+1}_{8 \text{ veces}}} = \frac{5}{8}$$

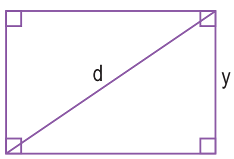
Otra forma:
Aplicando L' Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1} \right)'$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{8}x^{\frac{-7}{8}}}{\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}} = \frac{5}{8}$$

Clave D

13.



$d^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow d = \sqrt{x^2+y^2}$ ...(1)

Como:
$2x + 2y = 2 \Rightarrow x + y = 1$
$y = 1 - x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$d(x) = \left(x^2+(1-x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$d'(x) = \frac{1}{2}(2x+2(-1)(1-x))\left(x^2+(1-x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$d'(x) = \dfrac{(2x-1)}{\sqrt{x^2+(1-x)^2}}$; para maximizar:

$d'(x) = 0 \wedge d''(x) > 0 \Rightarrow$ la diagonal es mínima

$\Rightarrow \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+(1-x)^2}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Reemplazando $x = \frac{1}{2}$ en (2):

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Área $= xy = \frac{1}{4}$ m^2

Clave A

14. $A = \lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \left(\dfrac{\text{sen}\pi x - \cos \pi x}{1 - \tan \pi x} \right)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, aplicando L' Hospital:

$A = \lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \left(\dfrac{\pi \cos \pi x + \pi \text{sen} \pi x}{-\pi \sec^2 \pi x} \right)$

$\Rightarrow A = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}{-\pi(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{-\pi \, . \, 2}$

$\therefore A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 104) Unidad 4

Comunicación matemática

1. A) $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{6(x+\triangle x)^3 - 6x^3}{\triangle x}$

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{6(x^3+3x^2\triangle x + 3x\triangle x^2 + \triangle x^3) - 6x^3}{\triangle x}$

Aplicando límites:

$= \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{18(x^2 . \triangle x)}{\triangle x} + \underbrace{\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{18 \triangle x^2 . x}{\triangle x} + \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{6(\triangle x^3)}{\triangle x}}_{0 \, + \, 0}$

$= 18x^2$

$\therefore f'(x) = 18x^2$

B)

I. $H(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow H'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$

$H'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} <> \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

II. $H(x) = \cos 4x$

$\Rightarrow H'(x) = -(\text{sen}4x)(4x)' = -4\text{sen}4x$

III. $H(x) = \dfrac{\text{sen}(3x)}{x}$

Por el teorema de división de derivadas:

$H'(x) = \dfrac{(\text{sen}3x)'x - (x)'(\text{sen}3x)}{x^2}$

$H'(x) = \dfrac{3x\cos 3x - \text{sen}3x}{x^2}$

IV. $H(x) = \ln \text{sen}x$

$\dfrac{dH(x)}{dx} = \dfrac{1}{\text{sen}x} \dfrac{d\text{sen}x}{dx}$

$\dfrac{dH(x)}{dx} = \dfrac{1}{\text{sen}x} \cdot \cos x \dfrac{dx}{dx}$

$\therefore \dfrac{dH(x)}{dx} = \cot x$

V. $H(x) = \tan(\ln 3x)$

$H'(x) = \sec^2(\ln 3x).(\ln 3x)'$

$H'(x) = \sec^2(\ln 3x).\frac{1}{3x}.3$

Reduciendo:

$H'(x) = \dfrac{\sec^2(\ln 3x)}{x}$

2. $x(t) = 7t^2 + 3t + 4$

$\frac{dx}{dt} = 14t + 3 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 14$

I. $x(0) = 4$ m

II. $x(2) = 38$ m $\wedge$ $\frac{dx}{dt}(2) = 31$ m/s

III. $a = 14$ m/s^2

Razonamiento y demostración

3. Si: $f(x) = 5x^2 - 7x + 8$

$\Rightarrow f'(x) = 10x - 7$

Clave C

4. Si: $f(x) = 3\sqrt[5]{x^2} = 3x^{\frac{2}{5}}$

Derivando:

$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1}$

$f'(x) = \frac{6}{5} \cdot x^{\frac{-3}{5}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}$

Clave E

5. $f(x) = 5x^8 - 3x^2 - 2010$

$\Rightarrow f'(x) = 40x^7 - 6x$

$\therefore f'(1) = 40(1)^7 - 6(1) = 34$

Clave D

6. $f(x) = \tan 2x - \tan x$

$f'(x) = 2\sec^2(2x) - \sec^2 x$

$f'(0) = 2\sec^2(0) - \sec^2(0) = \sec^2(0)$

$\therefore f'(0) = 1$

Clave B

7. $A = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \sqrt[4]{1-x}}{2x}\right)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$; entonces aplicamos L' Hospital:

$A = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1-(1-x)^{\frac{1}{4}}}{2x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-\frac{1}{4}(-1)(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right)$

$\Rightarrow A = \lim_{x \to 0} \frac{1}{8(1-x)^{\frac{3}{4}}}$

$\therefore A = \frac{1}{8}$

Clave C

Resolución de problemas

8. $P(x) = x^2 + ax + b$

$P'(x) = 2x + a = 0$

$x = -\frac{a}{2} = 1$

$\Rightarrow a = -2$

Como: $P(1) = 3$

$\Rightarrow 1 + a + b = 3$

$1 + (-2) + b = 3$

$-1 + b = 3$

$\Rightarrow b = 4$

$\therefore a \cdot b = -8$

Clave E

9. Sean los números n y m.

$n + m^2 = 147 \quad ...(1)$

$nm = \text{máx.} \quad ...(2)$

(1) en (2): $(147 - m^2)\,m = \text{máx}$

Para maximizar derivamos e igualamos a cero:

$\Rightarrow (147m - m^3)' = 0$

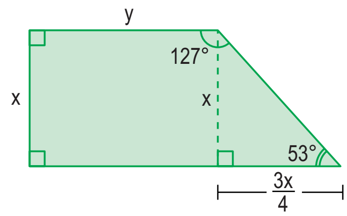
$147 - 3m^2 = 0$

$m^2 = 49$

$\Rightarrow m = 7 \wedge n = 98$

Clave E

10.



Área: $xy + 3\frac{x^2}{8}$

Del dato: $y = 100 - x$

Área $= x(100 - x) + 3\frac{x^2}{8} = 100x - x^2 + 3\frac{x^2}{8}$

Maximizamos derivando:

$100 - 2x + \frac{3x}{4} = 0$

$\frac{5x}{4} = 100$

$\Rightarrow x = 80 \wedge y = 20$

Clave A

Nivel 2 (página 105) Unidad 4

Comunicación matemática

11. La curva es $f(x)=x^3 - x - 3$ donde el punto de paso es: $((2; f(2)) = (2; 3)$

Nos falta la pendiente m para determinar la ecuación, por teoría:

$m = f'(x_0) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

En $x_0 = 2 \quad f'(2) = 11$

$\Rightarrow m = 11$

Punto de paso: (2; 3) y m = 11

$\Rightarrow L_T : y - 3 = 11(x - 2)$

$y - 11x + 19 = 0$

- Para L_N recta normal recordar:
  $mL_T \cdot mL_N = -1$

$\Rightarrow mL_N = \frac{-1}{11}$ y punto de paso: (2; 3)

L_N: $y - 3 = -\frac{1}{11}(x - 2)$

Desarrollamos: $11y + x - 35 = 0$

12.

- $F(x) = 4x^4 + 3x$
  $F'(x) = 16x^3 + 3$
  $F''(x) = 48x$
  $F'''(x) = 48$
- $F(x) = 10\sqrt[5]{x}$
  $F'(x) = \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$
  $F''(x) = -\frac{8}{5\sqrt[5]{x^9}}$
  $F'''(x) = \frac{72}{25\sqrt[5]{x^9}}$
- $F(x) = 3\cos 4x$
  $F'(x) = -12\,\text{sen}4x$
  $F''(x) = -48\cos 4x$
  $F'''(x) = 192\,\text{sen}4x$

- $F(x) = \ln 3x$

  $F'(x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

  $F''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

  $F''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

- $F(x) = e^{-x}$

  $F'(x) = -e^{-x}$

  $F''(x) = e^{-x}$

  $F'''(x) = -e^{-x}$

Razonamiento y demostración

13. $A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}\right)$ tiene la forma $\dfrac{0}{0}$,

Aplicando L' Hospital:

$\Rightarrow A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ae^{ax} - be^{bx}}{1}\right)$

$\therefore\ A = ae^0 - be^0 = a - b$

Clave B

14. $f(x)=3(x^2)(\text{sen}x)$

Usamos teorema:

$(f(x)\, G(x))' = f'(x)\, G(x) + G'(x)\, f(x)$

$f'(x)=3\,[2x\text{sen}x + x^2\cos x]$

$f'(x)=3x(2\text{sen}x+x\cos x)$

Clave E

Resolución de problemas

15. Dato:

$y = A\text{sen}3x + B\cos 3x$

Derivamos:

$y' = A\cos 3x(3) + B(-\text{sen}3x)(3)$

$y' = 3A\cos 3x - 3B\text{sen}3x$ ...(I)

Derivamos:

$y'' = 3A(-\text{sen}3x)(3) - 3B(\cos 3x)(3)$

$y'' = -9A\text{sen}3x - 9B\cos 3x$ ...(II)

Dato:

$y'' + 4y' + 3y = 10\cos 3x$ ...(α)

(I) y (II) en (α):

$-9A\text{sen}3x - 9B\cos 3x + 4(3A\cos 3x - 3B\text{sen}3x) + 3(A\text{sen}3x + B\cos 3x) = 10\cos 3x$

Reducimos:

$-(12B + 6A)\text{sen}3x + (12A - 6B)\cos 3x = 10\cos 3x$

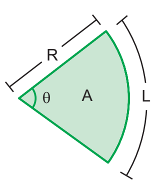
Identificamos:

$\left.\begin{matrix} 12B + 6A = 0 \\ 12A - 6B = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \dfrac{2}{3},\ B = -\dfrac{1}{3}$

Nos piden: $A - B = \dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1$

Clave B

16. Del enunciado:



Dato: $2R + L = 200$

$\Rightarrow L = 200 - 2R$

Sabemos que:

$A(R) = \dfrac{RL}{2}$

$A(R) = \dfrac{R(200 - 2R)}{2}$

$A(R) = 100R - R^2$

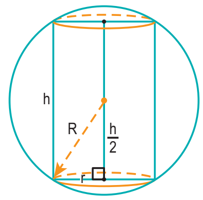
Derivando y maximizando:

$A'(R) = 100 - 2R = 0$

$R = 50$

Clave D

17.



$A_{Lateral}$: $A_L = 2\pi r\, .\, h$ ...(1)

Del gráfico:

$R^2 = r^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2$

$r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$

$\Rightarrow r = \left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1):

$A_L(h) = 2\pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} h$

Derivando:

$A'_L(h) = 2\pi\left[\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{h}{2}\right)\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} h + \left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

$A'_L(h) = 2\pi\left(\dfrac{-h^2}{4\sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}} + \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}\right)$

$A'_L(h) = 0$

Luego:

$-h^2 + 4\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right) = 0$

$\therefore h = \sqrt{2}\,R$

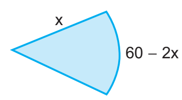
Clave B

Nivel 3 (página 105) Unidad 4

Comunicación matemática

18.

A)



Encontramos la función área:

$A(x) = \dfrac{LR}{2}$

$A(x) = \dfrac{(x)(60 - 2x)}{2}$

$A(x) = x(30 - x)$

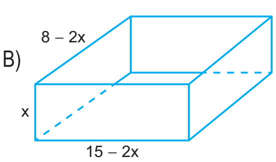
$A(x) = 30x - x^2$

Maximizamos : $\dfrac{dA(x)}{dx} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dAF(x)}{dx} = 30 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 15$ cm $\ \wedge\ L = 30$ cm

B)



Determinamos la función volumen:
$V(x) = x(15 - 2x)(8 - 2x)$
$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$

Maximizamos:
$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 23x + 30 = 0$

$3x$	-5
x	-6

$x = \frac{5}{3} \vee x = 6$

Evaluamos en $V(x) \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ se obtiene volumen máximo.

19. ▪ $f(x) = x^3 - 3x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$
$x = \pm 1$
$f''(x) = 6x$ con $+1 > 0$
$\exists$ mín.
$f''(x) = 6x$ con $-1 < 0$
$\exists$ máx.

▪ $f(x) = -x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = -2x = 0$
$f''(x) = -2\ \exists$ máx.

▪ $f(x) = 7 - x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -2x + 1 = 0$
$x = 1/2$
$f''(x) = -2\ \exists$ máx.

▪ $f(x) = (7 - x)^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 2x - 14 = 0$
$x = 7$
$f''(x) = -2 \Rightarrow \exists$ máx.

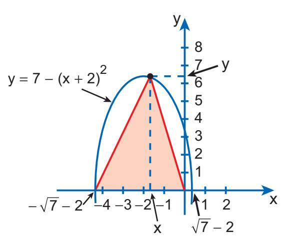
20.

I. $y - 7 = -(x^2 + 4x + 4)$
$y = -x^2 - 4x + 3$
$y' = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0$
$x = -2$
Luego: $y(-2) = 7$
$\Rightarrow$ Tiene un máx. o mín. en $(-2; 7)$.

II. $y'' = -2 < 0 \Rightarrow$ es un máximo

III. $L_T = y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
$x_0 = 1 \Rightarrow y - (-2) = (-2(1) - 4)(x - 1)$
$y + 2 = -6x + 6$
$L_T: y = -6x + 4$

IV.



Se sabe que el área(A) de un triángulo es: $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Sean: b: base; y: altura
Donde:
$b = 0 - \left(-\sqrt{7} - 2\right) = \sqrt{7} + 2$
$y = 7 - (x+2)^2 = -x^2 - 4x + 3$

$$A(x) = \frac{\left(\sqrt{7} + 2\right)\left(-x^2 - 4x + 3\right)}{2}$$

Luego:
$A'(x) = -\left(\sqrt{7} + 2\right)x - 2\sqrt{7} - 4$
$\Rightarrow -\left(\sqrt{7} + 2\right)x - 2\sqrt{7} - 4 = 0$
$x = -2$ (extremo)

Como: $A''(x) = -\left(\sqrt{7} + 2\right) < 0$

$\Rightarrow (-2; 7)$ es un máximo

Piden: $A_{máx.} = A(-2) = \frac{\left(\sqrt{7} + 2\right).(7)}{2}$

$A_{máx.} = \frac{7\sqrt{7}}{2} + 7$

Razonamiento y demostración

21. $f(x) = \frac{e^{x^4 + 2x^3 + x}}{11}$

$f'(x) = \frac{(x^4 + 2x^3 + x)'}{11} e^{x^4 + 2x^3 + x}$

$f'(x) = \frac{(4x^3 + 2 \,.\, 3x^2 + 1)}{11} e^{x^4 + 2x^3 + x}$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{(4 + 6 + 1)}{11} e^{1 + 2 + 1} = \frac{11}{11} e^4$

$\therefore f'(1) = e^4$

Clave D

22. $M = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}\right)$

Tiene la forma $\frac{0}{0}$, aplicando L' Hospital:

$M = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{m(-\text{sen}mx) - n(-\text{sen}nx)}{2x}\right)$

$M = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{-m\text{sen}mx + n\text{sen}nx}{2x}\right)$

Tiene la forma $\frac{0}{0}$, aplicando nuevamente L' Hospital:

$M = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{-m^2 \cos mx + n^2 \cos nx}{2}\right)$

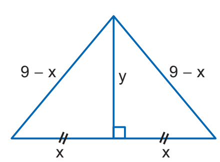
$\Rightarrow M = \frac{-m^2(1) + n^2(1)}{2}$

$\therefore M = \frac{1}{2}(n^2 - m^2)$

Clave D

Resolución de problemas

23. Del enunciado:



Piden área máxima:

Área: $A = \frac{2xy}{2} = xy$ ...(1)

Del gráfico:
$y^2 + x^2 = (9 - x)^2$
$\Rightarrow y = \sqrt{81 - 18x}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1) y derivamos:

$A(x) = x\sqrt{81 - 18x} = \sqrt{81x^2 - 18x^3}$ ...(3)

$A'(x) = \frac{1}{2}(162x - 54x^2)(81x^2 - 18x^3)^{-\frac{1}{2}}$

$A'(x) = \frac{(81x - 27x^2)}{\sqrt{81x^2 - 18x^3}} = \frac{27x(3 - x)}{3x\sqrt{9 - 2x}}$

Igualamos a cero (maximizamos)

$$A'(x) = \frac{9(3-x)}{\sqrt{9-2x}} = 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

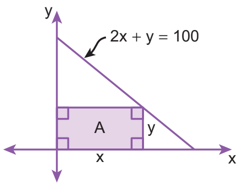
Reemplazando x = 3 en (3):

$$A(3) = 3\sqrt{81 - 18(3)} = 3\sqrt{27}$$

$$\therefore A_{máx.} = A(3) = 9\sqrt{3}\ m^2$$

Clave A

24.



$A = x \cdot y$ ...(1)

Además:

$2x + y = 100$ (recta en un vértice)

$y = 100 - 2x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$ ...(3)

$A'(x) = 100 - 4x = 0$

$\Rightarrow x = 25$

Reemplazando x = 25 en (3):

$\Rightarrow A(25) = 25(100 - 2(25))$

$\therefore A(25) = 25(50) = 1250$

Clave D

25. $P(x) = (x + 1)(x - 2)(ax^2 + bx + c)$

$P(x) = (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c)$

$P'(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx + c) + (x + 1)(x - 2)(2ax + b)$

Luego:

$P(0) = -2(c) = 12 \Rightarrow c = -6$

$P(1) = -2(a + b - 6) = 16$

$\Rightarrow a + b = -2$ ...(1)

$P'(2) = 3(4a + 2b - 6) = 0$

$2a + b = 3$ ...(2)

De (1) y (2):

$\Rightarrow a = 5 \wedge b = -7$

$\Rightarrow P(x) = (x + 1)(x - 2)(5x^2 - 7x - 6)$

$P(3) = 4 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 - 6)$

$\therefore P(3) = 72$

Clave D

26. Si $f(x) = \ln(x + 1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3(-1)}{(x+1)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)(-1)^{n+1}}{(x+1)^n}$$

$$\Rightarrow f^n(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^n} \quad \ldots(1)$$

Además: $\dfrac{(n-1)!}{f^n(x)} = 729$ (dato) ...(2)

Reemplazando (1):

$$\frac{(n-1)!}{\dfrac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^n}} = 729$$

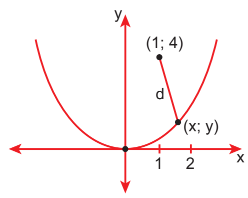
$$\frac{(x+1)^n}{(-1)^{n+1}} = 729, \text{ n es impar}$$

$(x + 1)^n = 9^3 \Rightarrow x = 8 \wedge n = 3$

$\therefore x + n = 11$

Clave D

27.



$d^2 = (y - 4)^2 + (x - 1)^2$ ...(1)

Como $y^2 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$d(y) = \sqrt{(y-4)^2 + \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2}$$

$$d(y) = \sqrt{y^2 - 8y + 16 + \frac{y^4}{4} - \frac{2y^2}{2} + 1}$$

$$d(y) = \sqrt{\frac{y^4}{4} - 8y + 17}$$

$$\Rightarrow d'(y) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{y^3 - 8}{\sqrt{\dfrac{y^4}{4} - 8y + 17}} = 0$$

Pero: $\dfrac{y^4}{4} - 8y + 17 \neq 0$

$\Rightarrow y^3 - 8 = 0$

$y = 2$

Reemplazando y = 2 en (2):

x = 2

Por lo tanto: El punto es (2; 2).

Clave C

28.

$I(x) = P(x) \cdot x$

$I(x) = (180 - 1{,}2x)x$

$I(x) = 180x - 1{,}2x^2$

$I'(x) = 180 - 2{,}4x = 0$

$\Rightarrow x = 75$

Como:

$P(x) = 180 - 1{,}2x$

$P(75) = 180 - 1{,}2(75)$

$\therefore P(75) = 90$

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 107) Unidad 4

1. $a_1 = n + 1$

$a_2 = (n + 1)^2$

$a_3 = (n + 1)^3$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n = (n + 1)^n$

Clave C

2. $a_1 = 7$

$a_2 = a_1 - 10 = -3$

$a_3 = a_2 - 10 = -13$

$a_4 = a_3 - 10 = -23$

$a_5 = a_4 - 10 = -33$

$a_6 = a_5 - 10 = -43$

Clave B

3. $\{a_n\} = 10; 11; 12; ...; 24$

Suma de una PA de razón 1:

$$S = \frac{(10 + 24)}{2}n; \text{ donde } n = \frac{24 - 10}{1} + 1 = 15$$

$S = 17 \times 15 = 255$

Clave A

4. Determinamos el término enésimo:

$a_1 = 2 = 2(1)^2$

$a_2 = 8 = 2(2)^2$

$a_3 = 18 = 2(3)^2$

$\vdots$

$a_n \ = 2(n)^2$

$\Rightarrow a_{12} = 2 \times 12^2 = 288$

Clave D

5. $$a_5 = \frac{5 \times 5 + 5^{-1}}{2 \times 5 + 5^{-1}} = \frac{25 + \frac{1}{5}}{10 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{126}{5}}{\frac{51}{5}} = \frac{126}{51}$$

$$a_7 = \frac{35 + \frac{1}{7}}{14 + \frac{1}{7}} = \frac{246}{99}$$

$$\therefore \frac{a_5}{a_7} \approx 1$$

Clave C

6. (F) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ es decreciente.

(F) $a_{20} = \dfrac{20}{401}$

(V) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Clave E

7. $\dfrac{n}{2^n}: \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{8}; \dfrac{1}{4}; ...$ ✓ es acotada superiormente

$\dfrac{2n}{1 + n}: 1; \dfrac{4}{3}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{8}{5}; ...$ ✓ es acotada inferiormente

$\dfrac{1 - 4n}{1 + 2n}: -1; -\dfrac{7}{5}; \dfrac{-11}{7}; ...$ ✓ es acotada superiormente

$\dfrac{(-1)^n}{n^2}: -1; \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{16}; ....$ ⊗ no acotada

$\dfrac{n^2}{n + 1}: \dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{9}{4}; ...$ ✓ acotada inferiormente

$\dfrac{(n + 1)!}{n!} = \dfrac{(n + 1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1: 2; 3; 4; 5; ...$ ✓ acotada inferiormente

8. $a_1 = 3(1) + 3(1)^2 = 6$ ... (I)

$n = 2: a_1 + a_2 = 3(2) + 3(2)^2 = 18$ ... (II)

De (I) y (II): $a_2 = 12$

$\Rightarrow r = a_2 - a_1 = 6$

$\therefore t_7 = a_1 + 6(r) = 6 + 6(6) = 42$

Clave E

9. Como es PA: $z - y = y - x - 5$ ... (I)

$y - x - 5 = x + 5 - (x - 2)$ ... (II)

De (II) : $y - x = 12$

En (I) : $z - y = 12 - 5 = 7$

Clave C

10. Sea la sucesión $a; ar; ar^2$

$\Rightarrow a + ar + ar^2 = 21$ ... (I)

$\Rightarrow a^3r^3 = 216$

$ar = 6$ ... (II)

En (I): $a + ar^2 = 15$ ... (III)

(II) en (III):

$\dfrac{6}{r} + 6r = 15$

$2r^2 - 5r + 2 = 0$

$r \quad\ -2$

$2r \quad -1$

$r = 2$; $r = 1/2$ como $r \in \mathbb{Z}$: $r = 2$; $a = 3$

Piden: $t_{10} = a_1(r^{10-1}) = 3(2^{10-1}) = 1536$

Clave B

11. Usamos: $q = \sqrt[m-n]{\dfrac{t_m}{t_n}} \Rightarrow \sqrt[20-16]{\dfrac{400}{25}}$

$q = 2$

Clave A

12. $8; 8q; 8q^2; 8q^3; 8q^4; 8q^5; 5832$

$\Rightarrow 8q^6 = 5832$

$q^6 = 729 = 3^6 \Rightarrow q = 3$

$\therefore t_5 = 8q^4 = 8 \, . \, 3^4 = 648$

Clave B

13. Si $\log r = -1 \Rightarrow r = \dfrac{1}{10}$

$\log a = 7 \Rightarrow a = 10^7$

$t_k = t_1 \, . \, r^{k-1} = r$

$10^7(10^{-1})^{k-1} = 10^{-1}$

$10^{7-k+1} = 10^{-1}$

$\Rightarrow 8 - k = -1$

$\therefore k = 9$

Clave D

14. Tomamos límites:

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} \frac{7n^2+3n+6}{2n^2-2n+1}\Big\}\text{dividimos} \div n^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}}{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}; \quad \text{recordar} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} a_n = \frac{7}{2}$$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 109) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. $a_4 = 4^2 - 7 = 9 \Rightarrow \sqrt{a_4} = \sqrt{9} = 3$

Clave C

4. $a_n = 2^1; \frac{3^2}{2}; \frac{4^3}{3}; ...$

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n}$$

$$\Rightarrow a_{24} = \frac{(25)^{24}}{24}$$

Clave B

5. $a_n = \frac{n}{n+3} = \frac{n+3-3}{n+3} = 1 - \frac{3}{n+3}$

Sabemos:

$n \geq 1$

$n+3 \geq 4$

$0 < \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \frac{3}{n+3} \leq \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} \leq \frac{-3}{n+3} < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{n+3} < 1$

Clave A

6. Por propiedad de sumatorias

$$\sum_{k=1}^{28}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{28}k^2 + \sum_{k=1}^{28}k$$

(sumas notables)

$$= \underbrace{\underbrace{1^2+2^2+...28^2}_{\frac{(28)(29)(57)}{6}} + \underbrace{1+2+3+...28}_{\frac{(28)(29)}{2}}}_{8120}$$

Clave D

7. Tomamos límites

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty}\frac{n^3+n^2+5}{2n^3+n-2}(\text{dividimos} \div n^3)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

Clave E

8. Observamos que a_n:

$3;\ 8;\ 18;\ 33;\ ...$

$\quad 5 \quad 10 \quad 15$

$\qquad 5 \quad 5$

Es una progresión de segundo grado.

$$\Longrightarrow S_{50} = 3C_1^{50} + 5C_2^{50} + 5C_3^{50}$$

$$= 3.50 + \frac{5.50.49}{2} + \frac{5.50.49.48}{6}$$

$$= 104\ 275$$

Clave B

Resolución de problemas

9. Dato: $S_n = n(3n+1)$

Si:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = 4 \Rightarrow a_1 = 4$

$n = 2 \Rightarrow S_2 = 14$

Luego:

$S_2 = a_1 + a_2 = 14$

$4 + a_2 = 14$

$a_2 = 10$

Luego: $r = a_2 - a_1 = 6$

Nos piden:

$r - a_1 = 6 - 4 = 2$

Clave C

10. Sabemos:

$S_n = [2t_1 + (n-1)r]\frac{n}{2}$

Luego:

$S_n' = [2(t_1 - 30) + (n-1)(r+1)]\frac{n}{2}$

$S_n' = [(2t_1 + (n-1)r + n - 61]\frac{n}{2}$

Dato: $S_n = S_n'$

$2t_1 + (n-1)r = 2t_1 + (n-1)r + n - 61$

$\therefore \quad n = 61$

Clave A

Nivel 2 (página 109) Unidad 4

Comunicación matemática

11.

I. V

II. F es oscilante

III. V es creciente y converge a 5

IV. V $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

V. V

12. Área del círculo n.° 10

Del dato: $R_1 = R$; $R_2 = \frac{9\not{0}}{10\not{0}}R$; $R_3 = \frac{9\not{0}}{10\not{0}}\cdot\frac{9\not{0}}{10\not{0}}R$;

$R_4 = \frac{90}{10}\cdot\frac{90}{100}\cdot\frac{90}{100}R; ...$

$\rightarrow R_1 = R$; $R_2 = \frac{9}{10}R$; $R_3 = \frac{9^2}{10^2}R$; $R_4 = \frac{9^3}{10^3}R$; ...

Es una PG de razón $q = \frac{9}{10}$ y $t_1 = R$, entonces:

- $R_{10} = \frac{9^9}{10^9}R \Rightarrow S_{10} = \pi\left(\frac{9^9}{10^9}R\right)^2 = \frac{9^{18}}{10^{18}}R^2$

- $S_1 = \pi R^2;\ S_2 = \pi\frac{9^2}{10^2}R^2;\ S_3 = \pi\frac{9^4}{10^4}R^2;\ S_4 = \pi\frac{9^6}{10^6}R^2;\ ...$

$$\Rightarrow S_L = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... = \frac{\pi R^2}{1 - \frac{9^2}{10^2}} = \frac{100\pi R^2}{19}$$

Razonamiento y demostración

13. El numerador es:

$$\frac{p^3 - 2 + (n-1)2}{n+2} \Rightarrow a_8 = \frac{p^3 - 2 + (7)2}{8+2} = \frac{p^3 + 12}{10}$$

Clave D

14. $\frac{n^2}{n+1} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; ...\right\} \rightarrow \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{1}{2}$

Clave C

15. $a_8 = 8^3 + 8^2 + 1 = 577$

Luego veamos término general de b_n

$b_n = 6n + 11$

$b_{13} = 6(13) + 11 = 89 \Rightarrow a_8 - b_{13} = 577 - 89 = 488$

Clave B

16. Tomamos límites a a_n

$$\lim_{x \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

Propiedad de límites

$$\lim_{x \to \infty} a_n = \sqrt{2 + \lim_{x \to \infty} a_{n-1}}$$

Suponemos que el límite sea L

$L = \sqrt{2 + L}$

$L^2 = 2 + L$

$L^2 - L - 2 = 0$

$L = 2 \lor L = -1$

Se observa que $a_n > 0$

$\Rightarrow L > 0$

$\therefore\ L = 2$

Clave C

17. $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{7}{32} + \frac{15}{128} + ...$

$$S = \frac{2-1}{2} + \frac{2^2-1}{2^3} + \frac{2^3-1}{2^5} + \frac{2^4-1}{2^7} + ...$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^7} ...$$

Agrupando:

$$S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + ...\right)$$

Aplicamos suma límite:

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\therefore S = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Clave B

18. $S = \frac{2}{2^9} + \frac{3}{2^8} + \frac{4}{2^7} + ... + \frac{10}{2}$

$$\frac{S}{2} = \frac{2}{2^{10}} + \frac{3}{2^9} + \frac{4}{2^8} + ... + \frac{10}{2^2}$$

$$\Rightarrow S - \frac{S}{2} = \frac{2}{2^9} + \frac{3}{2^8} + \frac{4}{2^7} + ... + \frac{10}{2}$$
$$- \frac{2}{2^{10}} - \frac{3}{2^9} - \frac{4}{2^8} - ... - \frac{10}{2^2}$$

$$\frac{S}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^7} ... - \frac{1}{2^2}}_{} + \frac{10}{2} - \frac{2}{2^{10}}$$

$$\frac{S}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \frac{1}{2^8}\right) + 5 - \frac{1}{2^9}$$

$$S = -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^7}\right)}_{} + 10 - \frac{1}{2^8}$$

$$S = -\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] + 10 - \frac{1}{2^8}$$

$$S = \frac{\frac{-1}{2^8} + 1}{-\frac{1}{2}} + 10 - \frac{1}{2^8}$$

$$S = \frac{1 - 2^8}{2^7} - \frac{1}{2^8} + 10 = 8 + \frac{1}{2^8} \approx 8$$

Clave A

19. $E = \underbrace{\frac{10+1}{10^1+1}}_{\text{término 1}} + \frac{100+1}{10^2+1} + \frac{1000+1}{10^3+1} + \frac{10000+1}{10^4+1} + ... + \underbrace{\frac{10^{20}+1}{10^{20}+1}}_{\text{término 20}}$

$$\Rightarrow E = \underbrace{10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + ... + 10^{20}}_{\text{PG}\quad q = 10,\ t_1 = 10} + 20$$

$$S_{20} = \frac{10(10^{20} - 1)}{10 - 1} + 20$$

$$S_{20} = \frac{10(10^{20} - 1)}{9} + 20 \Rightarrow S_{20} = \frac{10^{21}}{9} - \frac{10}{9} + 20$$

$$S_{20} = \frac{10^{21}}{9} + \frac{170}{9} \Rightarrow S_{20} = \frac{10^{21} + 170}{9}$$

Clave D

Resolución de problemas

20. $\overset{\circ}{2}$ y $\overset{\circ}{3} \Rightarrow \overset{\circ}{6}$

$\overset{\circ}{2}$ y $\overset{\circ}{3}$ pero no de 5 $\Rightarrow \neq \overset{\circ}{30}$

$\Rightarrow$ Determinamos los $\overset{\circ}{6}$

6; 12; 18; ...; 216 PA de razón 6.

$$\text{n.° términos} = \frac{216 - 6}{6} + 1 = 35 + 1 = 36$$

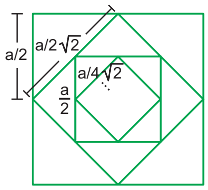
$\overset{\circ}{30}$: 30; 60; 90; ... 210

$$\text{n.° términos} = \frac{210 - 30}{30} + 1 = 7$$

$\therefore\ \overset{\circ}{6} - \overset{\circ}{30} = 36 - 7 = 29$ números

Clave D

21.



Nos piden:

$$S = a^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \ldots$$

$$S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \ldots$$

$$S = a^2\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$S = 2a^2$$

Clave A

22. PA:

$t_1 = 2$; r = razón

PG:

$t'_1 = 2$; q = razón

* $t_3 = t'_3$ (dato)
  $2 + 2r = 2q^2 \Rightarrow q^2 = r + 1$ ...(I)
* $t_{11} = t'_5$ (dato)
  $2 + 10r = 2 \cdot q^4$ ...(II)

(I) en (II):
$2 + 10r = 2(r + 1)^2$

Resolviendo:
$r = 3$

Reemplazando en (I): $q = 2$

Nos piden:
$q + r = 5$

Clave C

Nivel 3 (página 110) Unidad 4

Comunicación matemática

23.

A) $\sum\limits_{n=1}^{n} n^3 + \sum\limits_{n=1}^{n} n^2 + \sum\limits_{n=1}^{n} n$

$\Rightarrow$ Por sumas notables

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

B) $S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots$

PG infinita de razón $q = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

24.

Razonamiento y demostración

25. Sabemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\Rightarrow a_n$ se puede escribir

$$a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{n/6}\right)^{24}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} a_n = \underbrace{\left(\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n/6}\right)^{n/6}\right)^{24}}_{e}$$

$$\lim_{x\to\infty} a_n = e^{24}$$

Clave D

26. Si x; y; z están en PA:
$\Rightarrow x + z = 2y$

Luego:

$$M = \frac{x^2(y+z) + y^2 \cdot 2y + z^2(x+y)}{(3y)^3}$$

$$M = \frac{x^2y + x^2z + 2y^3 + z^2x + z^2y}{27y^3}$$

$$M = \frac{2y^3 + xz(x+z) + y(x^2+z^2)}{27y^3}$$

$$M = \frac{2y^3 + 2xyz + y(4y^2 - 2xz)}{27y^3}$$

$$M = \frac{6y^3}{27y^3}$$

$$\therefore M = \frac{2}{9}$$

Clave A

27. $a_n = \dfrac{3^{n-1}(3 + 5\times 3)}{6^{n-1}(1+8)}$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} . 2$$

Tomamos límites: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 2\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Sabemos:
$\lim\limits_{x\to\infty} b^n = 0$; si $0 < b < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Clave D

28. Usamos criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^{n+3}}{(n+2)!}}{\frac{7^{n+2}}{(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \frac{7}{n+2} = 0$$

La sucesión converge a cero ($r < 1$).

Clave C

29. Como es una PA razón:

$r = \underline{52} - \underline{47} = 5$

$\Rightarrow \overline{4n}_{(9)} - \overline{4m}_{(9)} = 5 \Rightarrow 36 + n - (36 + m) = 5 \Rightarrow n - m = 5$

$\Rightarrow 47 - \overline{4n}_{(9)} = 5 \Rightarrow 47 - (36 + n) = 5 \quad \Rightarrow 11 - n = 5$

$n = 6$

$m = 1$

$\therefore\ m + n = 7$

Clave B

30. Lo podemos escribir así:

$$S = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\underbrace{\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right]}_{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)}_{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}}$$

Tomamos límites a S_n:

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{3}{2}$$

Clave D

Resolución de problemas

31. Dato: $q < 1$

$$\frac{t_1}{1-q} = \frac{2}{7} \quad ...(I)$$

$$\frac{t_1^3}{1-q^3} = \frac{8}{511} \quad ...(II)$$

Elevando al cubo en (I):

$$\frac{t_1^3}{(1-q)^3} = \frac{8}{343} \quad ...(III)$$

Dividiendo (III) entre (I):

$$\frac{1-q^3}{(1-q)^3} = \frac{511}{343}$$

$$\frac{(1-q)(q^2+q+1)}{(1-q)^3} = \frac{73}{49}$$

$$\frac{q^2+q+1}{q^2-2q+1} = \frac{73}{49}$$

Reduciendo se tiene:

$8q^2 - 65q + 8 = 0$

$8q \quad -1$

$q \quad\ \ -8$

$q = 8 \quad \vee \quad q = \frac{1}{8}\ (q < 1)$

$\therefore\ q = \frac{1}{8}$

Clave E

32. $t_1\ ;\ t_2\ ;\ t_3 \quad ...(I) \Rightarrow t_2 = t_1 q;\ t_3 = t_1 q^2$

$t_1\ ;\ t_2 + 4;\ t_3 \quad ...(II)$

$t_1\ ;\ t_2 + 4;\ t_3 + 32 \quad ...(III)$

De (II) y (I):

$$t_2 + 4 = \frac{t_1 + t_3}{2}$$

$$t_1 q + 4 = \frac{t_1 + t_1 q^2}{2}$$

$t_1(q^2 - 2q + 1) = 8 \quad ...(\alpha)$

De (III):

$(t_2 + 4)^2 = t_1(t_3 + 32)$

Reduciendo:

$t_1(4 - q) = 2 \quad ...(\beta)$

Dividiendo (α) entre (β):

$$\frac{t_1(q^2 - 2q + 1)}{t_1(4-q)} = 4$$

Efectuando:

$(q - 3)(q + 5) = 0$

$\Rightarrow q = 3 \ \vee\ q = -5$

Si $q = -5 \Rightarrow t_1 \notin \mathbb{Z}$, luego:

$q = 3$

En (β): $t_1(4 - 3) = 2 \Rightarrow t_1 = 2$

En (I): 2 ; 6 ; 18

Nos piden: $t_1 + t_2 + t_3$

$\therefore t_1 + t_2 + t_3 = 2 + 6 + 18 = 26$

Clave B

33. Tomando limite de a_n:

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} - \left(1 - \frac{1}{9n}\right)^{9n}\right\}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} - \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{9n}\right)^{9n}$$

Por propiedad de límites.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Reemplazando:

$$\lim_{x\to\infty} a_n = e + e - e = e$$

Clave C

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344